REMOTE STORAGE

Über graphische Bögen und die aus ihnen zusammengesetzten Kurven.

Von der

Sächs. Technischen Hochschule zu Dresden

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
(doctor rerum technicarum)

genehmigte

DISSERTATION.

Vorgelegt von Studienassessor **Rudolf Worlitzsch**
aus Radeberg.

Referent: Prof. Dr. W. Ludwig.
Korreferent: Prof. Dr. Kowalewski.

1921

25. Februar 1921.

QP16.36
W89u
cop.2

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

REMOTE STORAGE

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. phil. W. Ludwig

in Dankbarkeit gewidmet.

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

Einleitung.

Zahlreich sind die Untersuchungen, die seit langer Zeit über die ebenen analytischen Kurven dritter Ordnung von einem Newton, einem Plücker, einem Salmon, Sylvester, Hesse, Clebsch, Poncelet, Moebius, Graßmann, Steiner, Cremona, Schroeter, Durège, Reye, Sturm u. a. angestellt worden sind. Wenige dieser Werke legen eine analytisch-geometrische Methode der Behandlung zu Grunde. So gehen auf diese Art und Weise z. B. vor Salmon, dessen Werk deutsch von Fiedler herausgegeben ist, und Durège. Aus den Elementen der synthetischen Geometrie heraus entwickelt H. Schroeter in „Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung" jene Kurven. Allen aber ist gemeinsam, daß ihre Untersuchungen nur oder in vorwiegender Weise den algebraischen Kurven gelten. In dieser Abhandlung soll nun von dem algebraischen Charakter der Kurven gänzlich abgesehen, nur graphische Kurven sollen untersucht werden. Die Grundlage dieser ganzen Untersuchungen bilden die v. Staudt'schen Sätze, wie er sie in seiner „Geometrie der Lage" 1847 ausgesprochen hat. Auf diese Sätze baut dann weiter auf A. Kneser in Math. Ann. Bd. 34, 1889: „Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumkurven" und in Math. Ann. Bd. 41, 1893: „Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven." Ferner hat bereits 1884 H. Brunn in Sitz.-berichte der Math.-Phys. Classe der k. bayr. Akad. d. Wissensch. in München Bd. XXIV, „Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale" aufgestellt, in seiner Dissertation München 1887 „Ueber Ovale und Eiflächen" und seiner Habilitationsschrift München 1889 über „Curven ohne Wendepunkte" die Theorie erweitert. Der vorliegenden Abhandlung sind aber hauptsächlich die Untersuchungen von J. Hjelmslev und C. Juel zu Grunde gelegt worden:

J. Hjelmslev, „Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle". 1911.
, „Introduction à la théorie des suites monotones" 1914.
, „Darstellende Geometrie" 1914.
C. Juel, „Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung". 1914.

Es sollen nun zunächst Sätze und Eigenschaften von einfachen und Elementarbögen entwickelt werden. Dann sollen graphische

Zusammensetzungen zweier Bögen vorgenommen, die dann schließlich noch durch einen dritten Bogen geschlossen sollen werden. Das Endziel der Untersuchungen soll also die geschlossene Dreibogenkurve sein. Hier soll dann noch eine Erweiterung des Bogenbegriffs hinzugenommen werden. Es sollen auch Bögen betrachtet werden, welche sich durchs Unendliche erstrecken.

Zur Untersuchung dieser Fragen wurde ich durch Herrn Prof. Dr. W. Ludwig in seinem Seminar über höhere Geometrie angeregt. Ich möchte nicht versäumen, meinem hochverehrten Lehrer an dieser Stelle sowohl für das der Arbeit allzeit entgegengebrachte rege Interesse, für manchen Rat bei deren Abfassung als auch für Übernahme des Referates meinen herzlichsten Dank aussprechen. Gleichzeitig möchte ich auch nochmals Herrn Prof. Dr. Kowalewski wärmsten Dank für Übernahme des Korreferates aussprechen.

§ 1. Der einfache, der Elementarbogen.

Herr J. Hjelmslev stellt im 2. Teil des von H. E. Timerding herausgegebenen „Handbuches der angewandten Mathematik" in seiner „Darstellenden Geometrie" den Begriff des einfachen Bogens auf, dessen Definition wir wie folgt aussprechen können. Definition: Unter einem einfachen Bogen wollen wir einen Bogen von solcher Beschaffenheit verstehen, daß die zu einem bestimmten Umlaufssinne gehörende, vorwärtslaufende Halbtangente kontinuierlich und monoton variierend einen Winkel beschreibt, der kleiner als 180° ist (Fig. 1).

Was Hjelmslev hierbei unter dem Variieren der Tangente versteht, drückt er in seiner Abhandlung „Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle" aus, die 1911 in Oversigt over det kgl. Danske videnskabernes selskabs forhandlinger erschienen ist. Er sagt dort darüber in § 8:

„Théorème 26. — Etant donné un arc AB, ordinaire en tous les points qui sont différents de A, et supposé qu' il existe une position limite déterminée, commune à toutes les tangentes dont les points de contact convergent vers A, cette

position limite, a, sera tangente en A, et la tangente variera en A d' une façon continu."

Und im gleichen § stellt er noch folgendes auf:

„Théorème 27. — Etant donné une tangente à un arc ordinaire laquelle varie d' une façon continue en sont point de contact P, cette tangente sera position limite de la droite de jonction de deux points Q et R convergeant sur l' arc vers P d' une manière arbitraire."

Erweitern wir nun den Begriff des einfachen Bogens, d. h. fassen wir ihn projektiv, das hier und im folgenden im Sinne der projektiven Geometrie gebraucht werden soll, so kommen wir zum Begriff des Elementarbogens, wie ihn Herr C. Juel in seiner Abhandlung „Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung" folgendermaßen definiert:

Definition: „Unter einem im Endlichen liegenden Elementarbogen AB werden wir die Punktmenge verstehen, welche mit dem endlichen Gradenstück AB zusammen die vollständige Begrenzung eines konvexen Gebietes bildet" (Fig. 2).

Was setzt nun Juel noch von diesen Bögen voraus? Er fährt fort:

„Das Gebilde ist wie bekannt stetig und läßt sich stetig und gegenseitig eindeutig auf einem Geradenstück abbilden."

Ferner soll es in jedem Punkte eine „nach vorn" und eine „nach hinten" gerichtete Tangente geben, die beide in eine gerade Linie zusammenfallen sollen, und diese „Tangenten des Bogens folgen dann stetig aufeinander". Hieraus ersieht man sofort, daß der Begriff des Elementarbogens der weitere, der des einfachen Bogens der engere ist. Fassen wir beide jedoch im Sinne der projektiven Geometrie auf, so sind sie identisch. Daß dann die Sätze, die von Juel für den Elementarbogen aufgestellt worden sind, für den einfachen Bogen ohne weiteres, d. h. eventuell auch in vereinfachter Form gelten, ist ja sofort aus den Definitionen ersichtlich. Es dürfte nun auch nicht ganz ohne Interesse sein, nach dem Umgekehrten zu fragen, ob, wie weit und unter welchen Bedingungen die Sätze des einfachen Bogens Gültigkeit haben im Bereiche des Elementarbogens, was im folgenden untersucht werden soll.

Doch ehe wir dazu übergehen, sei noch folgender Satz ausgesprochen.

Satz: Der Elementarbogen besteht aus höchstens zwei einfachen Bögen.

Es ist nötig, höchstens noch hinzuzufügen, da dem nichts zu-

widerspricht, auch den einfachen Bogen als Elementarbogen aufzufassen. Wenn wir aber im folgenden von einem Elementarbogen sprechen, so sei diesen Bögen folgende neue Definition zu Grunde gelegt, die uns auch gleich den projektiven Zusammenhang beider Bögen lehrt.

Definition: Unter einem Elementarbogen soll ein Bogen von der Beschaffenheit verstanden werden, daß die zu einem bestimmten Umlaufssinn gehörende, vorwärtslaufende Halbtangente kontinuierlich und monoton variierend einen Winkel beschreibt, der größer als oder gleich 180°, kleiner als 360° ist.

Vergleichen wir die zuletzt ausgesprochenen Bemerkungen mit der oben ausgesprochenen Definition des einfachen Bogens, so folgt sofort die Richtigkeit des letzten Satzes, und wenn wir die Begriffe des einfachen und Elementarbogens so fassen, wie sie zuletzt dargetan worden sind, so können wir aus obigem Satze das höchstens streichen und den Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz: Der Elementarbogen besteht aus zwei und nur zwei einfachen Bögen.

Wenn nun all diese Bedingungen für den einfachen Bogen — vor allem die der Stetigkeit — erfüllt sind, so kann ein einfacher Bogen nach Hjelmslev „nicht mehr als eine Tagente besitzen, die einer gegebenen Linie parallel ist"; denn an einfachen Bogen kann es nicht zwei parallele Tangenten geben. Anders wird es beim Elementarbogen. Hier können sehr wohl zwei Tangenten existieren, die einer geraden Linie parallel laufen, da ja der Winkel, den die monoton variierende Halbtangente des Elementarbogens überstreicht, größer als oder gleich 180° ist und eine gerade Linie, wenn wir von ihrer Richtung absehen, nur um 180° um einen ihrer Punkte gedreht zu werden braucht, um die ganze Ebene zu überstreichen. Ersetzen wir jedoch in dem Satze für einfache Bögen die Worte Linie und Tangente bzw. durch Richtung und Halbtangente, so erhalten wir einen für beide Bögen gleichlautenden Satz, der folgendermaßen formuliert werden soll.

Lehrsatz: Zu einer gegebenen Richtung kann es an einem einfachen wie an einem Elementarbogen höchstens eine Halbtangente geben, die jene Richtung hat;

denn in der Ebene sind die möglichen Richtungen charakterisiert durch Winkel, die zwischen 0° und 360° gelegen sind, jenem Definitionsbereich der monoton variierenden vorwärtsgerichteten Halbtangente beim Elementarbogen.

Zweckmäßig dürfte es vielleicht sein, folgenden Satz ausdrücklich auszusprechen.

Lehrsatz: Zur Verbindungsstrecke der Endpunkte des ein-

fachen wie des Elementarbogens gibt es, ganz gleichgültig in welcher Richtung wir sie uns durchlaufen denken, eine und nur eine Tangente, die dieser parallel ist.

Dieser Satz kann als Axiom, als unmittelbare Folge der Stetigkeit angesehen werden. Beim Beweis dieses Satzes stößt man auf ähnliche Schwierigkeiten wie beim Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Hier sollen nur folgende Betrachtungen angestellt werden. Die Tangente hat zunächst mit der Verbindungsgeraden in dem einen Endpunkt ihren Berührungspunkt gemein. Wandert nun der Berührungspunkt mit seiner Tangente von einem Endpunkt des Bogens zum anderen, so wandert der Schnittpunkt der Tangente mit der Verbindungsgeraden immer mehr und mehr von dem Endpunkte weg, rückt schließlich ins Unendliche und kommt infolge der Eigenschaften der projektiven Ebene auf der anderen Seite wieder herein, bis er im anderen Endpunkt wieder mit jenem zusammenfällt. Da aber stetiges Variieren der Tangente vorausgesetzt worden ist, und diese einmal mit der Verbindungsgeraden den unendlich fernen Punkt gemeinsam hat, so muß in diesem Falle die Tangente parallel der Verbindungsgeraden sein, d. h. es gibt also eine Tangente, die zur Verbindungsgeraden der Endpunkt parallel ist, und daß es auch nur eine gibt, folgt beim einfachen Bogen daraus, daß es an ihn zu einer gegebenen geraden Linie höchstens eine parallele Tangente gibt, und beim Elementarbogen fallen infolge der Stetigkeit der Tangente die beiden möglichen Halbtangenten in eine gerade Linie zusammen. Dieses Existieren einer zur Verbindungsgeraden der Endpunkte parallelen Tangente spricht Hjelmslev in § 4 seiner „Contribution . . .“ wie folgt aus:

„Théorème 9. — Un arc plan AB composé exclusivement de points ordinaires (les seuls points limite A et B, que nous supposons différents, peuvent être exceptés) aura au moins un point intérieur dont la tangente sera parallèle à la droite AB.“

Den projektiven Zusammenhang von einfachem und Elementarbogen zeigen uns folgende Sätze.

Satz: Legt man in den Endpunkten eines einfachen Bogens die Tangenten an denselben, so bestimmen diese zusammen mit der Verbindungsstrecke der Endpunkte ein Dreieck, in dessem Innern ganz der Bogen gelegen ist (Fig. 3).

Auch beim Elementarbogen soll analog vorgegangen, auch hier soll das Dreieck, das aus den Endtangenten und der Schlußlinie gebildet wird, mit hinzugenommen werden, ein Dreieck, das Juel nicht betrachtet. Dann kehrt beim Elementarbogen der

letzte Satz sich jedoch gerade ins Gegenteil um, so daß wir bei ihm sagen können:

Satz: Legt man in den Endpunkten M, N eines Elementarbogens die Tangenten an diesen, so bestimmen diese zusammen mit der Verbindungsgeraden $\overline{MN}$ der Endpunkte ein Dreieck MNO, das ganz außerhalb des Bogens $\overset{\frown}{MN}$ liegt, wenn O den Schnittpunkt der beiden in M und N an den Bogen gelegten Tangenten bedeutet; jedoch liegt der Bogen ganz innerhalb des Winkelraumes MON (Fig. 4).

Der Grenzfall, daß nämlich die Tangenten in den Endpunkten parallel laufen, daß also O im Unendlichen liegt, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit weggelassen werden, da wir es beständig durch Collineation so einrichten können, daß O im Endlichen gelegen ist.

Beweisen wir aber noch den zuletzt ausgesprochenen Satz. Auf den Beweis des entsprechenden Satzes für den einfachen Bogen können wir verzichten, da er sich bei Hjelmslev befindet. Doch zum Beweise unseres Lehrsatzes müssen wir noch einen Satz aufstellen und beweisen, der für beide Bögen gilt.

Lehrsatz: Der Berührungspunkt P ist der einzige Punkt, den die Tangente mit einem einfachen wie Elementarbogen gemein hat.

Der Beweis werde nach Hjelmslev durchgeführt. Wir nehmen an, es gäbe noch einen Punkt P_1. Dann müßte auf dem Bogen $\overset{\frown}{PP_1}$ ein Punkt existieren, dessen Tangente der geraden Linie $\overline{PP_1}$, also der gegebenen Tangente parallel wäre, was aber oben gefundenem Satz zuwiderspricht.

So folgt nun hieraus, daß der Bogen $\overset{\frown}{MN}$ keinen weiteren Punkt mit der Tangente m in M als den Berührungspunkt M gemein hat. Der Bogen $\overset{\frown}{MN}$ muß daher ganz auf der einen Seite der Tangente m liegen. Gleiches gilt für die in N an den Bogen $\overset{\frown}{MN}$ gelegte Tangente n, so daß also der Bogen $\overset{\frown}{MN}$ auch ganz auf der einen Seite der Tangente n gelegen ist. Der Schnittpunkt von m und n sei O.

Aus dem obigen Satze, daß es zu einer gegebenen Richtung an einen Elementarbogen höchstens eine Halbtangente geben kann, die jene Richtung hat, und aus dem Definitionsbereich des Elementarbogens ergibt sich für diesen der

Lehrsatz: Zu jeder Endtangente eines Elementarbogens gibt es stets eine parallele Tangente.

Legen wir dann die zu OM parallele Tangente m' an $\overset{\frown}{MN}$, deren Berührungspunkt M' sei, so liegt der ganze Bogen auf der-

selben Seite von m' wie m; also liegen auch O, M, N auf dieser Seite, d. h. m' trifft die Seiten des Dreiecks nicht.

Da nun m' nicht die Seiten des Dreiecks MON schneidet, so muß auch M' ganz außerhalb und somit auch der Bogen MN ganz außerhalb des Dreiecks MON gelegen sein, q. e. d.

Diese beiden Sätze sollen nun noch in folgendem Lehrsatz vereinigt werden.

Lehrsatz: Legt man durch die Schenkel eines Winkels eine gerade Linie, so zerteilt diese den Winkelraum in ein endliches Dreieck, in dessem Innern der einfache Bogen liegt, und einen unendlichen Teil, der den Elementarbogen in sich aufnimmt (Fig. 5).

Dieser Satz ermöglicht es direkt, den einfachen Bogen durch Centralcollineation in den Elementarbogen überzuführen und umgekehrt. So sind, worauf schon oben hingewiesen wurde, einfacher und Elementarbogen im Sinne der projektiven Geometrie identisch. Beide Bögen im Winkelraum MON zusammen ergeben dann das Oval, auf das wir noch zurückkommen werden.

Aus den Eigenschaften des konvexen Gebietes beim Elementarbogen, aus der Eigenschaft des einfachen Bogens, daß er ganz innerhalb jenes Dreiecks liegt, das aus den Tangenten in seinen Endpunkten und deren Verbindungsstrecke gebildet ist, folgen die beiden für einfache und Elementarbögen gleich lautenden Sätze.

Lehrsatz: Jeder stetige Bogen, der mit einer beliebig hindurchgelegten geraden Linie höchstens zwei Punkte gemein hat, ist ein einfacher bzw. Elementarbogen, je nachdem das aus den Endtangenten und der Verbindungsstrecke der Endpunkte des Bogens gebildete Dreieck den Bogen in sich enthält oder nicht.

Einen Satz, den man diesem in Parallele stellen kann, spricht Hjelmslev in seiner „Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle" p. 466/67 wie folgt aus:

„Théorème 17. — Un arc ordinaire AB ne contenant pas de segment et n' ayant que les points A et B en commun avec la droite AB, doit être convexe ou bien il doit contenir au moins un point d'inflexion."

Und als zweiten Lehrsatz können wir den folgenden aussprechen.

Lehrsatz: Jede gerade Linie, die mit der Verbindungsstrecke der Endpunkte eines einfachen wie Elementarbogens einen Punkt gemein hat, der nicht in einen ihrer Endpunkte fällt, schneidet den Bogen in einem von den Endpunkten verschiedenen Punkte; jede gerade Linie, die einen Punkt mit

der Verlängerung der Verbindungsstrecke gemein hat, schneidet den Bogen in keinen oder in zwei Punkten.

Ein Satz, der das Legen einer Tangente an einen Bogen ermöglicht, ist das von Hjelmslev in seiner „Contribution" p. 451 ausgesprochene:

> „Théorème 10. — Etant donnée un arc plan AB composé uniquement de points ordinaires (les deux points limite que nous supposons différents, peuvent faire exception) et contenu dans un domaine convexe Ω, on pourra mener une tangente à l'arc par tout point P du prolongement de la droite AB au delà de Ω".

Aus dem Bisherigen folgt noch weiter

Lehrsatz: Jeder Punkt P des einfachen Bogens $\overset{\frown}{AB}$ bzw. des Elementarbogens $\overset{\frown}{MN}$ hat — die Endpunkte ausgenommen — eine Tangente, die die Strecken $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ beim einfachen Bogen, die Verlängerungen von $\overline{OM}$ und $\overline{ON}$ beim Elementarbogen schneidet.

Hieraus folgt noch sofort der

Lehrsatz: Aus einem beliebigen Punkte R der Ebene gehen höchstens zwei Tangenten an einen einfachen wie Elementarbogen; es gehen keine, eine oder zwei Tangenten von R aus, je nachdem $\overline{RA}$, $\overline{RB}$, bzw. $\overline{RM}$, $\overline{RN}$ den Bogen kein-, ein- oder zweimal schneiden.

Und weiter gehört hierher der Satz, den v. Staudt in seiner „Geometrie der Lage" p. 74, § 141 aufstellt. Dort heißt es:

> „Jeder Punkt B einer Kurve s kann als der Endpunkt eines Stückes AB und als der Anfangspunkt eines Stückes BC betrachtet werden, so daß keines von diesen beiden Stücken der Kurve von einer durch den Punkt B gehenden Ebene in mehr als zwei Punkten und, im Falle die Kurve eben ist, von einer durch B gehenden Geraden in mehr als einem Punkte geschnitten wird."

Alle diese ausgesprochenen Sätze kann man, da ja bei graphischen Kurven die Richtigkeit derselben augenscheinlich ist, als Axiome ansehen, oder man kann sie als genauere Fixierung des Begriffs der stetigen Kurven betrachten. In diesem Sinne geht auch Herr A. Kneser vor einer Abhandlung in den Math. Ann., Bd. 36, aus der noch folgendes entnommen werden soll.

Kneser schreibt da in „Synthetische Untersuchungen über die Schmiegungsebene beliebiger Raumcurven und die Realitätsver-

hältnisse specieller Kegelschnittsysteme“ im § 1, wo er „Hülfssätze über ebene Curven“ aufstellt:

„2. Jetzt sei in der Ebene ein beliebiger von Singularitäten freier Bogen $\mathfrak{C}$ gegeben, der, falls er ins Unendliche geht, auch hier im Sinne der projektiven Auffassung stetigen Zusammenhang behält, und überhaupt mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat; dabei möge, wie gewöhnlich, eine Berührung als doppelter Schnitt gerechnet werden. Zwei beliebige, in P_1 und P_2 berührende Tangenten des Bogen $\mathfrak{C}$, welche sich in S schneiden, teilen dann, wie überhaupt irgend zwei Gerade, die Ebene in zwei Hälften, deren jede im projektiven Sinne ein zusammenhängendes Gebiet bildet. Schneiden sich nämlich die Geraden im Endlichen, so besteht jede Hälfte aus einem Paar zusammengehöriger Scheitelwinkelräume; sind sie parallel, so ist die eine Hälfte der von ihnen umschlossene, die andere der äußere Teil der Ebene. Die Kurve $\mathfrak{C}$ liegt nun ganz in der einen der beiden von SP_1 und SP_2 abgegrenzten Hälften, da diese Geraden in den Berührungspunkten von $\mathfrak{C}$ nicht überschritten werden, im übrigen aber nach Voraussetzung der Kurve nicht mehr begegnen. Zieht man also in der die Kurve nicht enthaltenden jener beiden Hälften durch S eine Gerade g, so trifft diese die Kurve nicht; letztere verläuft also ganz im Endlichen, wenn man g durch collineare Transformation zur unendlich fernen Geraden macht.

Nach dieser Transformation sind die Tangenten SP_1 und SP_2 parallel und die Kurve $\mathfrak{C}$ besäße drei parallele Tangenten, wenn durch S noch eine dritte Tangente gezogen werden könnte. Dann aber müßte die mittlere der drei parallelen Tangenten von der Kurve $\mathfrak{C}$ durchsetzt werden, da diese sich in den Berührungspunkten der beiden äußeren Tangenten auf entgegengesetzten Seiten der mittleren sich befindet und ganz im Endlichen verläuft. Eine Durchsetzung findet aber im Berührungspunkte nicht statt und außer diesem haben Kurve und Tangente keinen Punkt gemein; die dritte Tangente durch S ist also unmöglich, d. h.

ein von Singularitäten freier ebener Bogen, der keine Gerade mehr als zweimal begegnet, schickt

durch keinen Punkt mehr als zwei Tangenten. Hieraus folgt durch Uebergang zur reziproken Figur, daß ein Bogen, von dessen Tangenten durch keinen Punkt mehr als zwei gehen, mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat.

3. Da der Bogen $\mathfrak{C}$, wie bemerkt, ins Endliche projiziert werden kann, so ist evident, daß, wenn ν eine der Zahlen 0, 1, 2 ist, alle Geraden der Ebene, welche mit $\mathfrak{C}$ genau ν Punkte gemein haben, ein Continuum bilden; die so erhaltenen drei Continuen werden durch die Tangenten und die durch die Endpunktes des Bogens $\mathfrak{C}$ gehenden Geraden voneinander getrennt. Geht man zur reziproken Figur über, so kann die Voraussetzung, daß der betrachtete Bogen keiner Geraden mehr als zweimal begegnet, beibehalten, da sie nach Nr. 2 in sich reziprok ist; man kann also mit Berücksichtigung der eben erwähnten Continuen folgenden Satz formulieren:

Begegnet ein von Singularitäten freier ebener Bogen keiner Geraden mehr als zweimal, so zerfällt die Ebene in drei derartige Gebiete (0), (1), (2), daß durch jeden Punkt des Gebietes (ν) genau ν Tangenten des Bogens gehen. Dabei werden die Gebiete (0) und (2) durch den Bogen selbst, dagegen (0) und (1) sowie (1) und (2) durch die Endtangenten des Bogens voneinander geschieden."

Dieser letzte von Kneser ausgesprochene Satz kann in Parallele zu dem von mir p. 12 ausgesprochenen Lehrsatz gestellt werden.

Auch eine andere Abhandlung von Kneser, „Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven", die sich im 11. Bd. der Math. Ann. befindet, soll hier noch berücksichtigt werden. In den der Abhandlung vorausgeschickten Vorbemerkungen geht Kneser in § 1 auf die Frage ein, „ wann der Schnittpunkt der Tangente mit einer festen Kurve die Richtung seiner Bewegung längs dieser umkehrt", und diese Frage soll hier noch als Abschluß der ersten Betrachtungen nach Kneser beantwortet werden; er schreibt:

„Es seien etwa (Fig. 6 und 7) $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ irgend zwei von Singularitäten freie Bögen, M ein im Endlichen liegender Punkt des ersteren mit den Tangente m. Die Voraussetzung der Lage im Endlichen ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da es nur

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY

um die Ableitung projektiver Eigenschaften handelt. Zieht man dann durch M irgend zwei von m verschiedene Geraden g und h, so teilen dieselben die Ebene in zwei vollkommene Flächenwinkel. Dasjenige dieser Gebiete, in welchem die Tangente m verläuft, werde durch [g h] bezeichnet; in ihm müssen alle von M hinreichend wenig verschiedenen Punkte der Kurve $\mathfrak{M}$ liegen, da die Verbindungslinie eines jeden von ihnen mit M beliebig wenig von m verschieden ist. Es sei ferner N ein Punkt des Bogens $\mathfrak{N}$, dessen Tangente n durch M gehe, ohne mit m identisch zu sein, und die Geraden g und h seien so gewählt, daß sie die Tangenten m und n voneinander trennen.

Dann durchlaufe der Punkt V, dessen Tangente v sei, in bestimmter Richtung längs des Bogens $\mathfrak{N}$ die Umgebung des Punktes N; da bei hinreichender Beschränkung dieser Umgebung alle Lagen von v, die in Betracht kommen, von n so wenig, wie man will, verschieden sind, so können sie alle mit dem Flächenwinkel [gh], welchem die Gerade n nicht angehört, nur endliche Strecken gemein haben, und diese liegen ganz in dem einen oder anderen der beiden Scheitelwinkel, in welche das Gebiet [gh] zerfällt, je nach der Lage eines einzigen ihrer Punkte, z. B. des Schnittpunktes (m, v). Dieser liegt nach den Staudt'schen Sätzen entweder erst in dem einen und dann in dem anderen jener beiden Scheitelwinkelräume oder nur in dem einen, d. h. er passiert die Lage M ohne Aenderung seiner Bewegungsrichtung oder kehrt in ihr um, je nachdem die Punkte M und N voneinander verschieden sind oder nicht.

Der Schnittpunkt der Geraden v mit $\mathfrak{M}$ gehört nun wegen der Lage dieses Bogens im Gebiet [gh] jedenfalls den bezeichneten endlichen Strecken der Geraden v an; dieser Schnittpunkt kehrt also die Richtung seiner Bewegung längs des Bogens $\mathfrak{M}$ um oder behält sie ungeändert bei, je nachdem die Punkte M und N zusammenfallen oder nicht.

Fallen M und N zusammen, so ändert sich demnach für einen längs des Bogens $\mathfrak{M}$ laufenden Punkt die Anzahl der durch ihn gehenden Tangenten des Bogens $\mathfrak{N}$ um zwei beim Passieren des Punktes M; sind M und N verschieden, so tritt keine Aenderung

dieser Zahl ein. Längs des Bogens N stößt also stets eines seiner Gebiete (m) mit einem Gebiete (m + 2) zusammen, wenn wie früher durch (ν) das Gebiet der Punkte bezeichnet wird, durch welche genau ν Tangenten des betrachteten Bogens hindurchgehen."

Nachdem nun einige allgemeine Eigenschaften von einfachen und Elementarbögen aufgestellt worden sind, sollen nun in § 2 Kurven den Erörterungen zu Grunde gelegt werden, die aus zwei einfachen bzw. Elementarbogen bestehen.

§ 2. Die aus zwei einfachen bzw. Elementarbogen zusammengesetzte Kurve mit einer Minimalzahl von Knotenpunkten.

Die zwei in Frage kommenden einfachen Bögen seien durch $\alpha \equiv$ BA, $\beta \equiv$ AC, die Elementarbögen durch $\mu \equiv$ MO, $\nu \equiv$ ON bezeichnet. Wenn es sich um Zusammensetzung von Bögen handelt, so dürfte vor allem der den beiden Bögen gemeinsame Punkt A bzw. O von Interesse sein. In den Punkten A und O wollen wir jedoch voraussetzen, daß eine gemeinsame Tangente vorhanden ist, daß keine sogenannten Knickpunkte auftreten sollen. Bedenkt man dann, daß die in A bzw. O berührenden Halbtangenten entgegengesetzt gerichtet sein oder zusammenfallen, daß die Bögen auf derselben oder auf verschiedener Seite der Zusammensetzungstangente gelegen sein können, so ersieht man sofort, daß vier Arten von Zusammensetzungspunkten sich ergeben werden, je nach den vier Möglichkeiten der Zusammensetzung, die nun im folgenden näher untersucht werden sollen.

An die Spitze unserer Betrachtungen über Zusammensetzungen wollen wir das 20. Theorem jener schon oben erwähnten Abhandlung von Hjelmslev „Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle" stellen. Dort heißt es:

„Théorème 20. Tout arc ordinaire plan, exempt de points d'inflexion et de segments, se compose d'un nombre fini d'arcs convexes rangés en spirale simple ou double."

1.) Betrachten wir zunächst den Fall, daß die beiden Halbtangenten entgegengesetzt gerichtet sind, die Bögen jedoch auf

derselben Seite der Tangente liegen (Fig. 8, 9, 10, 11). Für diese Art der Zusammensetzung gilt nun der Satz:

Lehrsatz: Setzt man zwei einfache bzw. Elementarbögen so zusammen, daß im Zusammensetzungspunkte A bzw. O eine gemeinsame Tangente an beide Bögen existiert, daß die Halbtangenten entgegengesetzt gerichtet, und daß die Bögen auf derselben Seite dieser gemeinsamen Tangente liegen, so kann ein einfacher Bogen stets so fixiert werden, daß der Zusammensetzungspunkt innerer Punkt dieses einfachen Bogens wird;

denn es läßt sich (Fig. 8, 9, 10, 11) beim einfachen wie beim Elementarbogen durch eine der Zusammensetzungstangente parallele gerade Linie stets erreichen, daß die Tangenten in den Schnittpunkten dieser geraden Linie mit den Bögen α, β (μ, ν) ein Dreieck bilden, in dessem Innern ganz der Bogen, der den Zusammensetzungspunkt enthält, gelegen ist, dessen Tangente stetig von einem Punkt zum andern übergeht, und der infolgedessen ein einfacher Bogen sein muß.

Wieviel Punkte wird nun eine beliebig hindurchgelegte gerade Linie mit den auf diese Weise durch Zusammensetzung entstandenen Kurven gemein haben können? Oben hatten wir gefunden, daß ein Elementarbogen aus zwei einfachen Bögen besteht, und da auch zwei einfache Bögen nie mehr — wenn wir außer dem Zusammensetzungspunkt keinen weiteren gemeinsamen Punkt zulassen — als einen Elementarbogen in der Zusammensetzung ergeben können, ist die Frage für die aus zwei einfachen Bögen zusammengesetzte Kurve sofort dahin zu beantworten, daß sich höchstens zwei Punkte ergeben können; denn ein Elementarbogen hat mit jeder durch ihn gelegten geraden Linie höchstens zwei Punkte gemein. So können wir sagen:

Lehrsatz: Eine gerade Linie allgemeiner Lage kann mit einer in angegebener Weise aus zwei einfachen Bögen zusammengesetzten Kurve höchstens zwei Punkte gemeinsam haben.

Anders wird dies bei den aus zwei Elementarbögen zusammengesetzten Kurven. Legen wir durch die Endpunkte der Kurve $\overset{\frown}{MN}$ die Gerade, so muß diese mindestens einen der Elementarbögen μ und ν noch einmal und kann höchstens jeden noch einmal schneiden. Ziehen wir dann eine beliebig nahe parallele gerade Linie zu der Verbindungsgeraden, so wird uns diese dann drei bzw. vier Schnittpunkte mit der Kurve liefern. So ergibt sich der

Lehrsatz: Eine gerade Linie allgemeiner Lage kann mit einer

aus zwei Elementarbögen zusammengesetzten Kurve höchstens vier Punkte gemein haben.

Aus der graphischen Ordnungszahl vier der Kurve, kann man schließen, daß die projektive Beziehung, die zwischen den aus zwei einfachen Bögen zusammengestezten Kurven und dem einfachen Bogen besteht, zwischen den aus zwei Elementarbögen zusammengesetzten Kurven und dem Elementarbogen nicht existiert.

Wie Fig. 9, 10 und 11 zeigen, können bei der Zusammensetzung zweier Elementarbögen — wenn Knotenpunkte nicht auftreten sollen — drei verschiedene Formen sich ergeben. Es sollen zunächst die konvexen Gebiete der Bögen $\overset{\frown}{ON}$ und $\overset{\frown}{OM}$ nur den Punkt O gemein haben (Fig. 9), und die Endtangente m in M an $\overset{\frown}{OM}$ soll $\overset{\frown}{ON}$ nicht schneiden. Dann ergibt sich als graphische Ordnungszahl die Zahl drei. Vergrößern wir nun den Bogen $\overset{\frown}{ON}$ so, daß die Tangente m ihn schneidet (Fig. 10), so kann sie ihn zweimal schneiden. Dann läßt sich eine gerade Linie so hindurchlegen, daß sich vier Schnittpunkte T, T_1, S_1, S ergeben. Lassen wir schließlich zu, daß sich die konvexen Gebiete teilweise überdecken, so ergibt sich Fig. 11, bei der sich auch vier Schnittpunkte $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}$ ergeben können. Der Unterschied der Figuren 10 und 11 ist bedingt durch die Reihenfolge der vier Schnittpunkte mit einer hindurchgelegten geraden Linie. Ist diese Reihenfolge $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}_1$, so erhalten wir die Spiralenform, ist sie jedoch T_1, T, S, S_1, so ergibt sich die andere Form, obgleich die Reihenfolge der mit der geraden Linie auf den Bögen gemeinsamen Punkt dieselbe ist, nämlich T, T_1, S_1, S, bzw. $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}$. Welcher Fall eintritt, hängt davon ab, wie sich die Tangente in S ($\mathfrak{S}$) zum Bogen $\overset{\frown}{OM}$ ($\overset{\frown}{\mathfrak{OM}}$) verhält. Schneidet die Tangente in S den Bogen $\overset{\frown}{OT}$ einmal, so ergibt sich Fig. 10, schneidet die Tangente in $\mathfrak{S}$ den Bogen $\overset{\frown}{\mathfrak{OT}}$ zweimal, so ergibt sich Fig. 11. Die Vertauschung in der Reihenfolge der gemeinsamen Punkte der beiden Elementarbögen mit der hindurchgelegten geraden Linie wird bedingt durch das teilweise Ueberdecken der konvexen Gebiete bei Fig. 11.

Das Resultat, das sich aus dieser ersten Möglichkeit der Zusammensetzung ergeben hat, soll in folgendem Satze ausgesprochen werden.

Lehrsatz: Setzt man in einem Punkte A (O) zwei einfache bzw. Elementarbögen so zusammen, daß ihre Halbtangenten entgegengesetzt gerichtet, die Bögen jedoch auf derselben Seite der gemeinsamen Tangente gelegen sind, so kann es stets durch Hindurchlegen einer geraden Linie erreicht

werden, daß A bzw. O innere Punkte eines einfachen bzw. Elementarbogens werden, die definiert sind durch A (O) und die beiden auf der Kurve nächstfolgenden Schnittpunkte mit jener hindurchgelegten geraden Linie.

Auch Kneser behandelt die Fig. 10 in seiner oben erwähnten Abhandlung über die „einfachsten Gestalten ebener Curven" in § 12, nachdem er in § 10 festgestellt hat, daß eine Doppeltangente existiert, und er stellt folgenden interessanten Lehrsatz auf, dessen Beweis nach Kneser p. 363/64 gebracht werden soll.

„Satz: Es gibt keine geschlossenen Kurven, die an Singularitäten entweder nur eine Doppeltangente, oder nur einen Doppelpunkt besitzen.

Zu diesem Zwecke gehen wir davon aus, daß der Bogen S_1S_2 nach § 10 mit s außer den Berührungspunkten S_1 und S_2 keine weiteren Punkte gemein hat. Wenn also t eine Tangente dieses Bogens ist, deren Berührungspunkt T in ungeänderter Richtung von S_1 nach S_2 läuft, so überstreicht nach den Staud'schen Sätzen der Schnittpunkt (st) die eine der beiden Strecken S_1S_2 genau einfach; diese werde durch $[S_1S_2]_1$, die andere durch $[S_1S_2]_2$ bezeichnet. Es sei N_1 ein Punkt der ersteren, N_2 ein Punkt der zweiten Strecke; dann kehrt die Gerade $[N_2T]$ den Sinn ihrer Drehung gar nicht, die Gerade $[N_1T]$ genau einmal um, wenn sie nämlich in die einzige durch N_1 gehende Tangente des Bogens S_1S_2 übergeht. Die Gerade $[N_1T]$ hat demnach zu Anfang und zu Ende der Bewegung des Punktes T entgegengesetzten, die Gerade $[N_2T]$ denselben Drehungssinn (Fig. 10a). Letztere dreht sich also in demselben Sinne, wenn der Punkt T den Bogen S_1S_2 über S_1 herausgehend verläßt und von S_2 her in ihn hineintritt.

Wenn nun speziell s die einzige Doppeltangente der betrachteten Kurve ist, so kann diese nicht — bei Ausschluß sonstiger Singularitäten geschlossen sein; denn in diesem Falle wäre derjenige zweite Bogen S_1S_2, der den bisher betrachteten zu einer geschlossenen Kurve ergänzt, ein Bogen von derselben Beschaffenheit; die Schnittpunkte seiner Tangenten mit s liegen also auch alle auf einer und derselben der beiden Strecken S_1S_2 und bedecken dieselbe einfach; es wäre dies die Strecke $[S_1S_2]_2$, da der Schnittpunkt (st) in diese hineinrückt, wenn der Punkt T z. B. durch S_1 vom ersten zum zweiten Bogen S_1S_2 übertritt. Von letzterem ginge also durch N_2 eine einzige Tangente, sodaß die Gerade $[N_2T]$ ihren Drehungssinn genau einmal umkehren müßte, wenn der Punkt T den zweiten Bogen S_1S_2 durchläuft. Dies steht aber im Widerspruch mit dem vorher betreffs des Drehungssinns der Geraden $[N_2T]$ erhaltenem Resultat; es gibt demnach keine geschlossenen Kurven der angenommenen Beschaffenheit. Fügt

man das reziprok entsprechende Resultat hinzu, so ergibt sich die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung in Form jenes Lehrsatzes."

2.) Es soll nun der Fall betrachtet werden, wo der Zusammensezungspunkt ein Wendepunkt, ein Inflexionspunkt, ist, in dem zwar noch die Halbtangenten entgegengesetzt gerichtet, die Bögen jedoch auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente gelegen sind (Fig. 12, 13, 13a). Der Wendepunkt soll hier also genau so definiert werden, wie es bei v. Staudt in der „Geometrie der Lage" in Nr. 197 geschehen ist.

Legt man nun durch A bzw. O eine gerade Linie, so kann diese höchstens noch zweimal schneiden, etwa in B_1, C_1 bzw. in M_1, N_1, da A sowohl als O doppelt zu zählen sind, als zu jedem Bogen gehörend, und jeder Bogen höchstens zwei Punkte mit einer geraden Linie gemein haben kann.

Schneidet nun eine durch A (O) gelegt gerade Linie den Bogen $\overset{\frown}{AB_1}$ ($\overset{\frown}{OM_1}$) in einem Punkte B_2 (M_2), so muß sie auch den Bogen $\overset{\frown}{AC_1}$ ($\overset{\frown}{ON_1}$) in einem Punkte C_2 (N_2) schneiden; denn sowohl aus dem zu dem einfachen Bogen gehörenden Dreieck wie aus den Eigenschaften des konvexen Gebietes folgt, daß jede gerade Linie, die durch den Endpunkt des einfachen bzw. Elementarbogens in das Dreieck bzw. konvexe Gebiet eintritt und keine Tangente ist, den Bogen ein und nur einmal schneiden kann. Rückt B_2 (M_2) immer näher und näher an A (O) heran, so muß auch C_2 (N_2) sich immer mehr und mehr dem Punkte A (O) nähern, bis schließlich B_2 und C_2 in A (M_2 und N_2 in O) zusammenfallen.

Hieraus ersieht man, daß wie bei den algebraischen Kurven in einem Wendepunkte mindestens drei benachbarte Kurvenpunkte mit der Wendetangente zusammenfallen.

Legt man nun aber eine beliebige nicht durch A (O) gehende gerade Linie durch die Kurve, so wird sich als Höchstzahl der Schnittpunkte bei der aus zwei einfachen Bögen zusammengesetzten drei, bei der aus zwei Elementarbögen zusammengesetzten Kurve vier ergeben. Die Zahl drei kann höchstens erreicht werden; denn schneidet (Fig. 12) eine gerade Linie etwa den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ zweimal, so muß sie auch die zwei Seiten $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ des zu ihm gehörigen Tangentialdreiecks ATB schneiden. Diese gerade Linie kann dann nie die Seite $\overline{AU}$ des anderen Tangentialdreiecks AUC schneiden; sie kann nur mit der Schlußlinie $\overline{AC}$ und mit $\overline{CU}$ je einen Punkt gemein haben. Hat aber eine gerade Linie mit der Verbindungsstrecke der Endpunkte einen Punkt gemein,

so kann sie nach einem früheren Satz nur einen Punkt mit dem Bogen gemein haben. Gleiche Betrachtungen lassen sich nun beim Elementarbogen nicht ausführen, da dessen Tangentialdreieck den Bogen ja nicht enthält. Wann wird sich nun die Zahl vier ergeben? Die Bögen (Fig. 13a) werden von O nach M bzw. N durchlaufen. Dann wird es sicher einen Punkt H auf $\overset{\frown}{OM}$ geben, dessen Tangente h senkrecht auf der Wendetangente t_0 steht; denn der Winkel, den die variierende Tangente beschreibt, soll ja $\geq 180^0$ sein. Der Schnittpunkt von h mit t_0 sei H'. Genau so wird es auf $\overset{\frown}{ON}$ einen Punkt I geben, wenn die Tangente einen Winkel von 270^0 — gegebenenfalls nach Verlängerung des Bogens NO — überstrichen hat, dessen Tangente i in I' senkrecht auf t_0 steht. Nun kann entweder H' oder I' näher an O liegen, beide müssen jedoch auf derselben Seite von O liegen. Es liege wie in der Figur H' näher an O. Lassen wir dann H weiter auf dem Bogen $\overset{\frown}{OM}$ nach M hin wandern, so wird sich H' stetig von O entfernen, lassen wir I weiter auf $\overset{\frown}{ON}$ nach N hin wandern, so wird sich I' stetig O nähern und zwar können wir es dann stets so einrichten, daß $i \parallel h$. Da die Bewegung der Punkte H' und I' auf t_0 stetig in entgegengesetzter Richtung erfolgt, so muß es auf t_0 einen Punkt K' geben, in dem I' und H' zusammenfallen, d. h. aber es existiert eine gemeinsame Tangente k, die in K_1 und K_2 die Bögen berührt. Legt man dann eine k beliebig nahe parallele gerade Linie auf derselben Seite wie O hindurch, so wird diese die Kurve viermal schneiden. Dieselben Betrachtungen kann man aber auch auf der anderen Seite von t_0 anstellen. Wenn dann die Bögen nur lang genug fortgeführt sind, d. h. wenn die Tangenten Winkel überstrichen haben, die größer als 270^0 sind, so wird sich auch dort noch eine gemeinsame Tangente an die Kurve ergeben.

Wie man nun dazu kommen kann, die Punkte A, O als Wendepunkte, die Tangenten t_A, t_O als Wendetangenten zu bezeichnen, mögen nachfolgende Betrachtungen erhellen, die Juel für den Elementarbogen ähnlich ausgeführt hat. Um A (O) als Mittelpunkt legen wir einen Kreis k (k') so, daß er die Kurve $\overset{\frown}{BC}$ ($\overset{\frown}{MN}$) ganz enthält. Betrachtet man dann den Schnittpunkt G (V) einer von C (M) kontinuierlich sich nach A (O) bewegenden Tangente an β (μ) mit dem Hilfskreise k (k'), so sieht man, was aus den Eigenschaften der Stetigkeiten beider Bögen sofort folgt, daß von C bis A (M bis O) der Punkt G (V) sich immer in ein und derselben Richtung auf dem Hilfskreis bewegt bis zum Punkte W (W'), wenn der Berührungspunkt der monoton

variierenden Tangente in A (O) angekommen ist. Anders wird es aber nun, wenn der Berührungspunkt auf den Bogen α (ν) zu liegen kommt. Der Bewegungssinn von G (V) verändert sich, die Bewegung kehrt um.

Ein Satz, der uns bestimmt das Vorhandensein eines Wendepunkts anzeigt, ist das von Hjelmslev aufgestellte 15. Theorem in seiner schon oben mehrfach erwähnten Abhandlung. Es heißt dort:

„Théorème 15. — Etant donné un arc ordinaire plan ne contenant pas de segment et ayant trois, et rien que trois points: A, B, C en commun avec une droite déterminée l, et posé le cas que ces points se suivent sur l'arc aussi bien que sur la droite dans l'ordre indiqué; l'arc contiendra au moins un point d' inflexion."

Hieraus und aus den oben dargetanen Betrachtungen folgt nun ohne weiteres die Bezeichnung der Punkte A und O als Wendepunkte.

3.) Jetzt soll nun der Fall betrachtet werden, daß die Halbtangenten in A (O) zusammenfallen, A (O) teilt die Kurve in zwei Bögen so, daß beide auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente liegen. Wir kommen dann zur Spitze erster Art, zum Rückkehrpunkt, zur Dornspitze (Fig. 14, 15). Legen wir dann eine beliebige gerade Linie hindurch, so kann sie, und dies gilt für beide Kurven, höchstens vier Punkte D, E, F, G (P, Q, R, S) mit $\overset{\frown}{BC}$ ($\overset{\frown}{MN}$) gemein haben, was ja ohne weiteres aus den zu den Bögen gehörenden Dreiecken folgt.

Beschreibt man auch hier analog dem vorigen Fall um A (O) als Mittelpunkt Kreise k (k') so, daß $\overset{\frown}{BC}$ ($\overset{\frown}{MN}$) ganz in derem Innern gelegen sind, verfolgt dann das Wandern des Schnittpunkts dieser mit den kontinuierlich variierenden Halbtangenten, so tritt beim Ueberschreiten von A (O) keine Umkehr des Schnittpunktes ein.

4.) Nun ist schließlich noch der Fall zu betrachten, in dem die beiden Halbtangenten auch wieder zusammenfallen, die Bögen jedoch auf derselben Seite der gemeinsamen Tangente liegen. So gelangen wir zur Spitze zweiter Art, zur Schnabelspitze (Fig. 16, 17).

Fragt man hier wieder nach der Höchstzahl der Kurvenpunkte, die eine beliebig hindurchgelegte gerade Linie trägt, so sieht man sofort, daß eine nicht durch A (O) gehende gerade Linie mit den Kurven vier Punkte gemein haben kann. Diese Zahl vier als graphische Ordnung der Kurve bleibt auch bei den Zusammensetzungen erhalten, wenn die gerade Linie durch A (O)

geht, da A (O), als zu jedem Bogen gehörend, doppelt zu zählen ist. Die beiden zu jedem einfachen Bogen gehörenden Dreiecke haben eine Seite gemein. Geht nun eine gerade Linie durch die eine gemeinsame Ecke, welche die gemeinsame Spitze der beiden Dreiecke ist, so folgt aus deren Natur, daß, wenn eine von der gemeinsamen Spitze ausgehende Seite des einen Dreiecks, die nicht beiden gemein ist, von einer geraden Linie geschnitten, die entsprechende Seite des anderen Dreiecks auch geschnitten werden kann und folglich auch die in diesen Dreiecken liegenden Bögen je einmal. Analoges gilt auch für die zu den Elementarbögen gehörenden Dreiecke, nur daß anstelle der Seiten deren Verlängerungen treten, eine Eigenschaft, die in dem projektiven Zusammenhang von einfachem und Elementarbogen begründet ist.

Stellt man hier wieder die Betrachtungen über das Wandern des Schnittpunktes der kontinuierlich variierenden Tangente mit einem die Kurve einschließenden Kreise an, dessen Mittelpunkt mit dem Zusammensetzungspunkt zusammenfällt, so findet man, daß hier beim Überschreiten jenes Punktes der Schnittpunkt der Halbtangente mit jenem Kreise umkehrt, ein Resultat, das wir bereits beim Wendepunkt gefunden hatten. Hier kommt aber noch hinzu, daß nicht nur die Halbtangente und somit deren Schnittpunkt mit dem Kreise umkehrt, sondern auch der Berührungspunkt. So ist auch in dem oben ausgesprochenen Sinne die Tangente in A (O) eine Wendetangente.

So können wir uns auch die Kurven erzeugt denken durch eine sich bewegende gerade Linie, welche die Kurve umhüllt, wie Plücker in seiner „Theorie der algebraischen Kurven“ (1839) im 2. Abschnitt, § 3 „Über die Natur der singulären Punkte und singulären geraden Linien, und die Art ihrer Entstehung“, vorgeht. Dort spricht er den Satz aus:

> „Wenn auf einer geraden Linie ein Punkt continuierlich fortrückt, während die gerade Linie stets um diesen Punkt sich continuierlich dreht, wird ein und dieselbe Kurve von jener geraden Linie umhüllt und von diesem Punkt beschrieben.“

Die bisher betrachteten Zusammensetzungen gingen von der Voraussetzung aus, daß erstens im Zusammensetzungspunkte eine gemeinsame Tangente vorhanden und zweitens außer diesem Punkte die Bögen keinen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen. Lassen wir die erste Einschränkung fallen, lassen wir also zu, daß im Zusammensetzungspunkte die Halbtangenten nicht in dieselbe gerade Linie fallen, so kommen wir zu Knickpunkten oder, um mit Juel zu reden, zu Winkelpunkten. Da man aber durch das Prinzip der Abrundung, die man durch Ersetzen zweier dem

betreffenden Winkelpunkte nahe liegender Teilbögen durch einen Bogen mit monoton variierender Tangente erreichen, solche Punkte ausschalten und somit sämtliche Kurven aus einfachen bzw. Elementarbögen der betrachteten Art zusammensetzen kann, sei hierauf nicht weiter eingegangen. Juel teilt nun diese Winkelpunkte in solche erster, zweiter und dritter Art ein, je nachdem man durch Abrundung zwei, einen oder keinen Inflexionspunkt erhält. Näheres hierüber findet sich bei Juel in der oben zitierten Abhandlung über Elementarkurven p. 123/25. Bei diesen Abrundungen hat man nur dafür zu sorgen, „1.) daß die Gerade B_1C_1 mit β_1 und γ_1 keine weiteren Punkte als B_1 und C_1 gemein hat, 2.) daß der Schnittpunkt O der Tangenten in B_1 und C_1 auf derselben Seite von B_1C_1 liegt wie der Winkelpunkt A, 3.) daß δ die Bögen β_1 und γ_1 bzw. in B_1 und C_1 berührt, keine weiteren Punkte mit β_1 und γ_1 gemein hat, und endlich den Winkelpunkt nicht in seinem Innern enthält“ (Fig. 18).

Genau so kann nun noch die zweite Einschränkung, daß außer dem Zusammensetzungspunkt kein gemeinsamer Punkt vorhanden sein soll, fallen gelassen werden. Auch dieses führt uns zu nichts neuem; denn die entstehenden Knotenpunkte kann man ja stets durch das Prinzip der Abrundung auflösen; denn auch sie sind Knickpunkte im Juelschen Sinne, und man gelangt dann je nach der Art der Auflösung zu verschiedenen Kurven, die auch in mehrere Kurven und Äste zerfallen können.

Sehen wir uns nochmals die vier Fälle der Zusammensetzung in Bezug auf diesen letzten Gesichtspunkt an. Beim zweiten und dritten Fall können keine Knotenpunkte auftreten, da die gemeinsame Tangente im Zusammensetzungspunkte die ganze Ebene in zwei getrennte Gebiete teilt, von denen jedes einen und nur einen Bogen aufnimmt. Der erste und vierte Fall lassen jedoch Knotenpunkte zu.

Kehren wir also nochmals zunächst zu dem ersten Fall zurück, wo die Halbtangenten entgegengesetzt gerichtet in einer geraden Linie liegend, die Bögen auf ein und derselben Seite der gemeinsamen Tangente gelegen sind. Dann können sich beliebig viele Knotenpunkte ergeben nach dem Satze, den Juel in seiner Abhandlung p. 127 aufstellt:

Satz: „Zwei Elementarkurven können beliebig viele, auch unendlich viele Punkte mit einander gemein haben.“

Ein einziger Knotenpunkt kann jedoch nur auftreten bei der aus zwei einfachen Bögen durch Zusammensetzung in einem gewöhnlichen Punkt entstandenen Kurve, da das Parallelführen der Bögen, das doch die Mannigfaltigkeit der Knotenpunkte ermög-

licht, hier nicht eintreten kann, da die Tangenten an jeden Teilbogen der Kurve nie zur Zusammensetzungstangente parallel laufen können. Bei den aus zwei Elementarbögen entstandenen Kurven, deren Zusammensetzungspunkt ein gewöhnlicher Punkt ist, und bei denjenigen Kurven, deren Zusammensetzungspunkt eine Schnabelspitze ist, können beliebig viele Knotenpunkte auftreten.

All diese möglichen Fälle der Knotenpunkte sollen also übergangen werden. Das Prinzip der Abrundung lehrt uns, jene zu behandeln.

Zum Schlusse dieses § sei kurz darauf eingegangen, daß durch Zusammensetzung zweier Elementar- bzw. zweier einfacher Bögen nicht nur offene Kurven sondern auch geschlossene Kurven entstehen können.

Bei den aus zwei einfachen Bögen sich zusammensetzenden Kurven ergibt sich, wenn wir von Winkelpunkten absehen, eine Möglichkeit, eine geschlossene Kurve zu erhalten, wenn nämlich beide Zusammensetzungspunkte Schnabelspitzen sind (Fig. 19).

Der analoge Fall, daß nämlich die Zusammensetzungspunkte Schnabelspitzen sind, läßt sich auch mit zwei Elementarbögen durchführen (Fig. 20), was wieder auf der projektiven Identität von einfachem und Elementarbogen beruht.

In beiden Fällen können sich natürlich nach dem oben ausgesprochenen Satze von Juel beliebig viele Knotenpunkte ergeben, Möglichkeiten, die außer Betracht gelassen werden sollen.

Ist es auch möglich, daß einer der Zusammensetzungspunkte zur Dornspitze wird? Diese Frage ist zu bejahen (Fig. 21), daß beide jedoch Dornspitzen sind, muß zurückgewiesen werden, da wir dann aus dem Rahmen zweier Elementarbögen zufolge deren Definition herauskämen. So erhalten wir die Bohnenform. Zum Oval (Fig. 22) gelangen wir schließlich, wenn wir die Dornspitze durch Abrundung — das Juelsche Prinzip der Abrundung erweiternd — zum Verschwinden bringen.

Als graphische Ordnungszahl ergibt sich bei den in Fig. 19, 20 und 21 dargestellten Kurven die Zahl vier, beim Oval jedoch nur zwei, sodaß man also auch durch das Prinzip der Abrundung eventuell die graphische Ordnungszahl einer Kurve erniedrigen kann.

Für die geschlossenen von Singularitäten freien Kurven stellt nun Kneser in der oben zitierten Abhandlung in § 8 p. 359 den folgenden Lehrsatz auf.

Lehrsatz: „Eine geschlossene von Singularitäten freie Kurve begegnet keiner Geraden öfter als zweimal, und durch keinen Punkt gehen mehr als zwei ihrer

Tangenten; sie kann stets als Projektion einer ganz im Endlichen gelegenen Kurve betrachtet werden."

§ 3. Schließung der aus zwei einfachen bzw. Elementarbogen erhaltenen Kurven durch einen dritten Bogen mit einer Minimalzahl von Knotenpunkten.

Im vorigen § haben wir schon gesehen, daß es möglich ist, aus zwei einfachen bzw. Elementarbögen geschlossene Kurven zu erhalten. Neben diesen geschlossenen Kurven haben sich aber noch andere ergeben, die jetzt durch einen dritten einfachen bzw. Elementarbogen geschlossen werden sollen. Die Punkte, in denen der dritte Bogen angesetzt werden soll, sollen keine sog. Knickpunkte sein, sondern wir unterwerfen sie denselben Bedingungen, die wir dem Zusammensetzungspunkt zweier Bögen auferlegt haben, sodaß wir also nur Punkte des vorigen § als Zusammensetzungspunkte erhalten. Ferner sollen Knotenpunkte wenn möglich vermieden oder ihre Anzahl soll auf ein Minimum beschränkt werden. Schließlich sollen Kurven, die durch Vergrößern oder Verkleinern der Schleife aus früheren gewonnen werden können, als nicht verschieden betrachtet werden.

Unsere Zweibogenkurven des vorigen § besitzen in ihren Endpunkten Tangenten, die, wenn wir von dem Fall, daß sie in eine gerade Linie zusammenfallen, absehen, die beiden möglichen Lagen zweier geraden Linien in der Ebene haben können, die also parallel sein oder sich schneiden müssen. Kehren wir nun nochmals zu unserer Fig. 5 von § 1 zurück. Dort haben wir zwei sich schneidende gerade Linien $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$, die Tangenten an unser Oval sind, das wir am Schluß des vorigen § hatten. Auch wenn C ins Unendliche rückt, d. h. wenn unsere beiden geraden Linien $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ parallel laufen, läßt sich stets ein Oval finden, das $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ zu Tangenten hat. Da es nun also stets ein Oval gibt, das die Endtangenten der Zweibogenkurve zu Tangenten und ihre Endpunkte zu Zusammensetzungspunkten hat, so ist die Schließung der Zweibogenkurve durch ein Oval stets möglich. Das Oval der Fig. 5 setzt sich aus einem einfachen und Elementarbogen zusammen. So ist also die Schließung einer aus zwei einfachen Bögen zusammengesetzten Zweibogenkurve durch einen

einfachen, die einer aus zwei Elementarbögen zusammengesetzten durch einen Elementarbogen möglich. Laufen die beiden Endtangenten parallel, so bekommen wir jenen Grenzfall, in dem bei einem Bogen die Endtangenten parallel gehen. Schließen wir diesen letzten Fall aus, der ja stets dadurch vermieden werden kann, daß man einen der beiden Bögen verlängert oder verkürzt, so kann folgender für das ganze Schließen von Kurven wichtige Satz ausgesprochen werden.

Lehrsatz: Eine Zweibogenkurve kann stets durch einen der beiden Teilbögen eines Ovals so geschlossen werden, daß die neue Dreibogenkurve nur aus einfachen oder nur aus Elementarbögen besteht.

Vier Fälle je nach der Art des Zusammensetzungspunktes und der Lage der gemeinsamen Tangente an beide Bögen haben wir im vorigen § kennen gelernt. Die sich bei ihnen ergebenden nicht geschlossenen Zweibogenkurven sollen nun geschlossen werden.

1.) Es war der Zusammensetzungspunkt zweier Bögen ein gewöhnlicher Punkt. Tritt dann kein Knotenpunkt auf, d. h. haben die ersten beiden einfachen Bögen außer ihrem Zusammensetzungspunkt keinen weiteren gemeinsamen Punkt, so können wir, die Endpunkte der Bögen als gewöhnliche Punkte betrachtend, durch Hinzufügen eines dritten einfachen Bogens (Fig. 23) die Kurve schließen. Wir erhalten dann das Oval; denn durch Zusammensetzen zweier einfacher Bögen erhält man einen Elementarbogen und dessen Endtangenten bestimmen mit der Schlußlinie der Endpunkte ein Dreieck, das ganz außerhalb des Elementarbogens gelegen ist, jedoch so, daß die ganze Kurve sich in diesem Winkelraum befindet. Dieses Dreieck kann nun als Tangentialdreieck eines einfachen Bogens gewählt werden und enthält dann den Schließungsbogen als dritten einfachen Bogen unserer Kurve. Hierbei sind die Zusammensetzungspunkte gewöhnliche Punkte gewesen. Nehmen wir jedoch jetzt von dem Schließungsoval den anderen Teilbogen, d. h. den Elementarbogen, für den wieder jenes Dreieck Tangentialdreieck ist, so werden die Zusammensetzungspunkte zu Schnabelspitzen; denn die ursprünglichen Bögen haben in B und C mit dem Schließungsbogen dieselben vorwärtsgerichteten Halbtangenten und liegen auf gleichen Seiten von ihnen. Hierbei kommen wir zu einer bereits in Fig. 20 gefundenen Kurve zurück, bei der beliebig viele Knotenpunkte auftreten können.

Haben nun die zwei einfachen Bögen außer ihrem Zusammensetzungspunkte A noch den Punkt D gemeinsam (Fig. 23a), sodaß also D als Knotenpunkt auftritt, dann ist die Schließung der

Kurve durch einen einfachen Bogen möglich, wenn die Zusammensetzungspunkte Dornspitzen werden. Machen wir jene jedoch zu Wendepunkten, die Endtangenten zu Wendetangenten, so ermöglicht der Elementarbogen des Schließungsovals die Überführung jener Kurve in eine geschlossene; denn der Schnittpunkt E der Endtangenten in B und C muß auf derselben Seite der Schlußlinie $\overline{BC}$ liegen wie D, da ja D im Scheitelwinkel zu BEC liegen muß, weil dieser den Ebenenteilen gemeinsam ist, in denen die Bögen enthalten sind. Also kommt für den einfachen Bogen das Tangentialdreieck BEC in Frage. Die Bögen liegen auf verschiedenen Seiten der Zusammensetzungstangente und die Halbtangenten fallen zusammen, d. h. die Zusammensetzungspunkte sind Dornspitzen. Beim Schließen vermittels des Elementarbogens müssen wir denjenigen Teil des Ovals nehmen, der im unendlichen Teil des Winkelraumes BEC gelegen ist. Die Halbtangenten sind dann entgegengesetzt gerichtet, die Bögen liegen auf verschiedenen Seiten von ihnen, d. h. die Zusammensetzungspunkte sind Wendepunkte.

Analog lassen sich nun die anderen Fälle behandeln, bei ihnen soll auf Beweise verzichtet, Resultate sollen nur angegeben werden.

Schließen wir also die aus zwei Elementarbögen in einem gewöhnlichen Punkt zusammengesetzte Kurve durch einen dritten Bogen, so kann dieser ein einfacher bzw. Elementarbogen sein, die Zusammensetzungspunkte können (Fig. 24) Wendepunkte oder Dornspitzen sein. Wenn wir von der Mannigfaltigkeit der Knotenpunkte absehen, so kommen wir wieder zu ähnlichen Figuren.

2.) Nun soll der Fall betrachtet werden, daß die Halbtangenten im Zusammensetzungspunkt A (O) der Zweibogenkurve zusammenfallen, A (O) die Kurve so teilt, daß die beiden Bögen auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente liegen, daß also der Zusammensetzungspunkt ein Rückkehrpunkt ist (Fig. 25). Für die aus einfachen Bögen zusammengesetzten Kurven kann man das Resultat in folgendem Satz zusammenfassen.

Satz: Besteht die Zweibogenkurve aus einfachen Bögen, so kann man sie durch einen Elementarbogen schließen, wenn die Zusammensetzungspunkte gewöhnliche Punkte sind, durch einen einfachen, wenn diese Punkte Schnabelspitzen sind.

Nehmen wir jetzt die aus Elementarbögen zusammengesetzte Zweibogenkurve, so müssen wir je nach der Größe des von der Halbtangente überstrichenen Winkelraums der beiden Bögen mehrere Fälle unterscheiden. Beschreiben (Fig. 25a) beide Halb-

tangenten Winkel, die kleiner als 270° sind, so erfolgt die Schließung durch einen einfachen Bogen, wenn die Zusammensetzungspunkte gewöhnliche Punkte sind, durch einen Elementarbogen, wenn jene Punkte Schnabelspitzen sind. Überstrichen (Fig. 25b) die Halbtangenten Winkel, die gleich 270° sind, d. h. stehen die Tangenten in den Endpunkten senkrecht auf der gemeinsamen Tangente, so kann, wenn jene Tangenten nicht in eine gerade Linie fallen, die Schließung durch einen dritten Bogen — jenen Grenzfall — erfolgen, wenn der eine Punkt ein gewöhnlicher, der andere eine Dornspitze oder der eine ein Wendepunkt und der andere eine Schnabelspitze ist. Die Fig. 25c—25f zeigen noch verschiedene mögliche Fälle, bei denen auch unterschieden ist, ob die Endtangente des einen Bogens den anderen schneidet oder nicht.

3.) Der Zusammensetzungspunkt sei nun bei der Zweibogenkurve eine Schnabelspitze.

Ist die Zusammensetzung aus zwei einfachen Bögen erfolgt, so ergeben sich infolge der Mannigfaltigkeit der Knotenpunkte unzählige Bilder. Wird jedoch von den Knotenpunkten abgesehen, so ist die Schließung (Fig. 26) durch einen dritten einfachen Bogen möglich, wenn der eine Punkt Dorn-, der andere Schnabelspitze wird, durch einen Elementarbogen, wenn der eine Punkt gewöhnlicher, der andere Punkt Wendepunkt wird. Bei der Schließung der aus zwei Elementarbögen zusammengesetzten Kurve (Fig. 26a) kehrt sich dies gerade ins Gegenteil um. Diese kann man durch einen einfachen Bogen schließen, wenn man die Zusammensetzungspunkte zu gewöhnlichen bzw. Wendepunkt macht, durch einen Elementarbogen, wenn man sie zur Dorn- bzw. Schnabelspitze macht.

4.) Schließlich werde nun noch der Fall behandelt, daß der Zusammensetzungspunkt der Zweibogenkurve ein Wendepunkt ist.

Bei den aus einfachen Bögen bestehenden Kurven ist dann die Schließung durch einen dritten einfachen Bogen wie durch einen Elementarbogen möglich (Fig. 27), wenn der eine Punkt gewöhnlicher, der andere Punkt Schnabelspitze wird. Ein gleiches Schließen kann bei den aus zwei Elementarbögen zusammengesetzten Kurven eintreten (Fig. 27a). Beschreiben aber die Tangenten Winkel, die größer als 270° sind (Fig. 27b), so ist das Schließen durch einen einfachen Bogen möglich, wenn die Zusammensetzungspunkte gewöhnlicher und Wendepunkt sind, durch einen Elementarbogen, wenn jene Punkte Dorn- und Schnabelspitze sind.

Dieser letzte Fall wird aber noch interessanter, wenn wir

Schließungsbögen zulassen, die sich durchs Unendliche erstrecken, was im folgenden geschehen soll.

§ 4. Die graphische Dreibogenkurve dritter Ordnung.

Die bisher betrachteten Bögen waren ganz im Endlichen gelegen. Es soll jetzt unser Bogenbegriff eine Erweiterung erfahren, indem wir im folgenden auch Bögen zur Schließung verwenden wollen, die durchs Unendliche gehen. Diese definieren wir einfach im Sinne der projektiven Geometrie als Projektionen endlicher Bögen. Unser Bogen (Fig. 28) muß dann eine Asymptote haben, der sich jeder Teilbogen von verschiedener Seite nähert. Die Zweibogenkurve mit Wendepunkt werde nun durch solch einen dritten sich durchs Unendliche erstreckenden Bogen geschlossen. Dann hat unsere Kurve notwendiger Weise eine Asymptote, die diesen unpaaren Zug einmal durchsetzen muß, und an die die Teilzüge von verschiedenen Seiten herantreten (Fig. 29). Ein dreimaliges Durchsetzen ist wohl an sich möglich, dann ist jedoch die Kurve nicht mehr 3. Ordnung und gehört nicht hierher. Ein zweimaliges Durchsetzen ist nicht möglich, da die Teilzüge von verschiedenen Seiten an die Asymptote herantreten. Jeder dieser Teilzüge muß dann einen Punkt größter Entfernung von der Asymptote haben, in dem die Tangente jener parallel läuft. Für diese Kurven stellt nun R. Sturm im 90. Bd. des Crelle'schen Journals den Satz auf:

Lehrsatz: „Durch jeden Punkt P des unpaaren Zuges U gehen zwei und nur zwei Tangenten an U; deren Berührungspunkte liegen je einer auf jedem der beiden P nicht enthaltenden von den drei Bogen, in welche U durch die drei Wendepunkte geteilt wird, und sie teilen selbst U derartig in zwei Bogen, daß der eine einen Wendepunkt, der andere die beiden anderen und zugleich P enthält."

Dieser Satz folgt auch aus dem von Juel im Anschluß an das Korrespondenzprinzip aufgestellte zweite Beispiel (p. 136):

„Hat eine völlig stetige Kurve nter Ordnung einen (n—2) fachen Punkt O, dann gehen aus diesem Punkte entweder keine oder auch zwei Tangenten, welche außerhalb O berühren."

Spezialisieren wir also diesen Satz für einen gewöhnlichen Punkt einer Kurve dritter Ordnung, so ergibt sich die Möglichkeit

von O oder zwei Tangenten. Daß es aber zwei und nicht keine Tangenten sein müssen, geht daraus hervor, daß P als Tangentialpunkt einer in einem anderen Punkte an die Kurve gelegten Tangente betrachtet werden kann.

Aus dem Sturm'schen Satz kann man einen Satz von E. Kötter folgern, den dieser im 114. Bd. des Crelle'schen Journals in seiner „Note über ebene Curven dritter Ordnung" (p. 175) ganz anders beweist. Dieser lautet nach Kötter

Lehrsatz: „Schneidet eine Gerade den Zug Z_3 in den Punkten A, B, C, eine zweite in den Punkten A_1, B_1, C_1, so müssen wenigstens zwei der letzteren einem der drei Bogen angehören, in die A, B, C den Zug zerlegen."

Aus dem Satz von Sturm können wir noch einen Satz folgern, den Kötter gleich an den Anfang seiner Betrachtungen stellt (p. 171).

Lehrsatz: „Die drei Schnittpunkte einer Geraden mit Z_3 können niemals einem und demselben Hauptbogen*) angehören. Insbesondere sind ein Punkt und die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die von ihm aus an Z_3 sich legen lassen, stets auf die drei Hauptbogen verteilt. Die einzige von einem Wendepunkt W_i noch ausgehende Tangente berührt den ihm nicht angrenzenden Hauptbogen im Punkte V_i."

Die Möbis'schen Sätze über Wendepunkte geschlossener Kurvenzüge sollen hier noch nach Kneser (Gestalten von Curven § 16) gebracht werden.

„Man weiß nach Staudt (Geometrie der Lage Nr. 203), daß die Anzahl der Wendepunkte eines geschlossenen unpaaren Zuges ungerade sein muß; es fragt sich, ob sie = 1 sein kann. Diese Frage kann jetzt leicht beantwortet werden, auch wenn man außer Wendepunkten noch Doppeltangenten als Singularitäten zuläßt. Wäre ein einziger Wendepunkt vorhanden, so erhielte man nach Fortlassung eines beliebig kleinen ihn enthaltenen Bogens einen Restbogen, dessen Endpunkte einander beliebig nahe kommen können, der also nach § 13 höchstens eine Doppeltangente besitzt. Wäre eine solche vorhanden, so müßte sie die Eigenschaften der in § 10 definierten Doppeltangente s besitzen, also mit dem betrachteten Bogen nur ihre Berührungspunkte gemein haben; das ist aber nicht möglich, da sich unser Bogen nur beliebig wenig von einem unpaaren Zuge unterscheidet, also jeder Doppeltangente noch außerhalb ihrer Berührungspunkte begegnen muß.

*) Hauptbogen sind diejenigen Bogen, in die der Zug durch die drei Wendepunkte zerlegt wird.

Sind keine Doppeltangenten vorhanden, so ist der Restbogen von Singularitäten frei; da seine Endpunkte einander beliebig genähert werden können, so geht nach § 8 durch keinen seiner Punkte die Tangente eines anderen. Das widerspricht aber der Tatsache, daß die Tangenten des Bogens diesen noch außerhalb des Berührungspunktes schneiden, da der Bogen von dem unpaaren Zuge nur beliebig wenig verschieden ist. Ein unpaarer geschlossener Zug hat also stets mindestens drei Wendepunkte.

Ebenso kann auch der wichtige Möbius-sche Satz bewiesen werden, daß ein unpaarer Zug, der keiner Geraden mehr als dreimal begegnet, nicht mehr als drei Wendepunkte besitzt.

Es seien etwa W_1 und W_2 zwei längs der Kurve aufeinanderfolgende Wendepunkte; der von ihnen begrenzte keinen Wendepunkt enthaltene Bogen heiße $\mathfrak{B}_1$, der Rest der Kurve $\mathfrak{B}_2$. Durchläuft dann der Punkt T den Bogen $\mathfrak{B}_1$ von W_1 nach W_2 hin, so kann der Punkt T', den die Tangente des Punktes T außer diesem noch mit der Kurve gemein hat, die Richtung seiner Bewegung längs der Kurve nach § 1 nicht ändern, da Doppeltangenten ausgeschlossen sind. Da nun der Punkt T' zu Anfang seiner Bewegung die Lage W_1 nach § 15 in entgegengesetzter Richtung wie T verläßt, so durchläuft er den Bogen $\mathfrak{B}_2$; zu Ende seiner Bewegung rückt er gleichzeitig mit T in entgegengesetzter Richtung in die Lage W_2. Diese Betrachtung gilt auch, wenn der Bogen $\mathfrak{B}_2$ einen Doppelpunkt enthält; dann kann nicht mehr als ein Wendepunkt vorhanden sein, da sonst der Punkt T' in den Doppelpunkt rücken müßte, womit man Gerade erhalten würde, die der Kurve viermal begegnen. — Im allgemeinen kann die für W_1 und W_2 durchgeführte Betrachtung auf irgend zwei aufeinanderfolgende Wendepunkte übertragen werden; sind also $2m + 1$ Wendepunkte vorhanden, so gehen durch jeden Punkt der Kurve außer der in ihm berührenden noch 2 m Tangenten der Kurve.

Wenn nun etwa durch den nicht singulären Punkt P vier Tangenten außer der in ihm berührenden Tangente p hindurchgehen ($m = 2$), so drehe sich eine durch P gehende Gerade g von der Lage p aus in dem einen und anderen Sinne, bis sie zum ersten Male mit einer der vier Tangenten zusammenfällt, welche in dem einen und anderen Falle durch a_1 und a_2 bezeichnet werde. Dann beschreibt die Gerade g einen vollkommenen Flächenwinkel $[a_1\ a_2]$, der von den Geraden a_1 und a_2 begrenzt wird, dem die Kurve in der Umgebung des Punktes P, nicht aber die übrigen durch P gehenden Tangenten angehören. Sollen also die letzteren von der Kurve berührt werden, so muß ein von P ausgehender die Kurve entlang laufender Punkt den Flächenwinkel $[a_1\ a_2]$ wieder verlassen, was in den Berührungspunkten der Tangenten

a_1 und a_2 offenbar nicht geschieht. Diese Geraden hätten dann außer ihren Berührungspunkten und P noch weitere, also mehr als drei Punkte mit der Kurve gemein, was der Voraussetzung widerspricht. Damit ist der Möbius'sche Satz, daß nicht mehr als drei Wendepunkte vorhanden sein können, also $m = 1$ sein muß, bewiesen."

Folgende Fragen sollen noch aufgeworfen werden. Ist eine Dreibogenkurve, von der zwei Bögen einfache Bögen sind, mit drei Wendepunkten stets unpaar und von dritter Ordnung? Diese Fragen sind zu bejahen; denn die Tangenten in den drei Wendepunkten der Dreibogenkurve definieren zwei Dreiecke, innerhalb deren die Bögen gelegen sein müssen. Eine Seite bzw. deren Verlängerung ist den beiden Dreiecken gemein, wohingegen die andere Seite bzw. deren Verlängerung, die als Halbtangenten in Frage kommen, entgegengesetzt gerichtet sind. Durch diese Tatsache, daß die Tangenten entgegengesetzt gerichtet sind, ist aber die Möglichkeit des Schließens der Kurve durch einen dritten im Endlichen gelegenen Bogen ausgeschlossen. Nur ein Schließen durch das Unendliche vermag diesen Richtungsunterschied infolge der Eigenschaften der projektiven Ebene herzustellen. Sonach ist gezeigt, daß eine Dreibogenkurve mit drei Wendepunkten stets unpaar sein muß. Daß diese auch von dritter Ordnung sein muß, folgt daraus, daß die sie einschließenden Dreieckseiten so geschnitten werden, daß sobald die Seiten des einen die Verlängerungen des anderen geschnitten werden und umgekehrt, und somit innerhalb der Dreiecke jedesmal nur ein Bogen geschnitten werden kann. Dieser Bogen ergibt nur zwei Schnittpunkte. Ein weiterer Schnittpunkt kommt noch hinzu mit dem sich durch das Unendliche erstreckenden Bogen, sodaß sich tatsächlich die Zahl drei als Ordnungszahl ergibt. Zusammenfassend gibt das also folgenden Lehrsatz.

Lehrsatz: Eine Dreibogenkurve mit drei Wendepunkten ist stets unpaar und von dritter Ordnung.

Bei einer algebraischen Kurve dritter Ordnung liegen ja nun bekanntlich diese drei Wendepunkte in einer geraden Linie, eine Forderung, die wir an unsere graphische Dreibogenkurve nicht zu stellen brauchen. Durch jene Forderung der algebraischen Kurven gestalten sich deren Bilder etwas anders, sind aber im wesentlichen den bisher betrachteten Bildern ähnlich. Eine Art algebraischer Kurven dritter Ordnung, die sicher doch auch ihr Analogon unter den graphischen Kurven dritter Ordnung haben wird, vermissen wir jedoch noch. Die algebraische Kurve dritter Ordnung kann doch auch in einen paaren und einen unpaaren Zug

zerfallen. Nun wollen wir sehen, ob wir auch den nicht analytischen, den graphischen Dreibogenkurven einen paaren Zug, ein Oval, beiordnen können, ohne deren graphische Ordnungszahl zu erhöhen. Daß dieser paare Zug nicht ganz beliebig zu dem unpaaren gelegen sein kann, ist bei den algebraischen Kurven dritter Ordnung bekannt. So dürfte es auch hier bei den graphischen Dreibogenkurven nicht ganz ohne Interesse sein, nach den Bedingungen zu fragen, welche das Oval erfüllen muß, um es einem unpaaren Zug einer graphischen Kurve dritter Ordnung beiordnen zu können, ohne deren graphische Ordnungszahl zu erhöhen (Fig. 30, 30a). Auszuschließen sind sofort die zu den Bögen gehörenden endlichen wie unendlichen Tangentialdreiecke als geometrischer Ort für das Oval; denn jede durch das eine Dreieck gelegte gerade Linie kann den in ihm enthaltenen Bogen zweimal schneiden. Da dann das Oval auch noch zweimal geschnitten würde, so würde sich vier als Ordnungszahl ergeben. Da das Oval mit jeder hindurchgelegten geraden Linie zwei Punkte gemein hat, so müssen wir nach einem Raum fragen, dessen sämtliche gerade Linien den unpaaren Zug der Dreibogenkurve nur in einem Punkte schneiden. Und dieser Raum ist einzig und allein durch denjenigen Winkelraum fixiert, der durch Verlängerung der Schenkel über den Scheitel hinaus derjeniger Winkel geschieht, in deren Innern einfache bzw. Elementarbögen gelegen sind. Die so erhaltene Kurve besteht freilich, da das Oval aus zwei Bögen — oder drei einfachen Bögen — besteht, aus mindestens fünf Bögen, ist jedoch von der Ordnungszahl drei. Das Hinzufügen eines Ovals ist jedoch nur bei denjenigen Dreibogenkurven, ohne die Ordnungszahl zu erhöhen, möglich, die aus einfachen Bögen zusammengesetzt sind. Treten jedoch Elementarbögen auf, so kann kein Oval hinzugefügt werden, da der Elementarbogen im unendlichen Teil der zu ihnen gehörenden Tangentialdreiecke gelegen ist. So können wir den Satz aussprechen:

Lehrsatz: Sind zwei einfache Bögen in einem Wendepunkt zusammengesetzt, macht man deren Endpunkte wieder zu Wendepunkten und schließt die Zweibogenkurve durch einen sich durchs Unendliche erstreckenden Bogen, so behält dieser unpaare Zug durch Hinzufügung eines Ovals seine Ordnungszahl drei bei, wenn das Oval in demjenigen Winkelraum liegt, der der Scheitelwinkelraum des den einfachen Bogen enthaltenden Winkelraums ist.

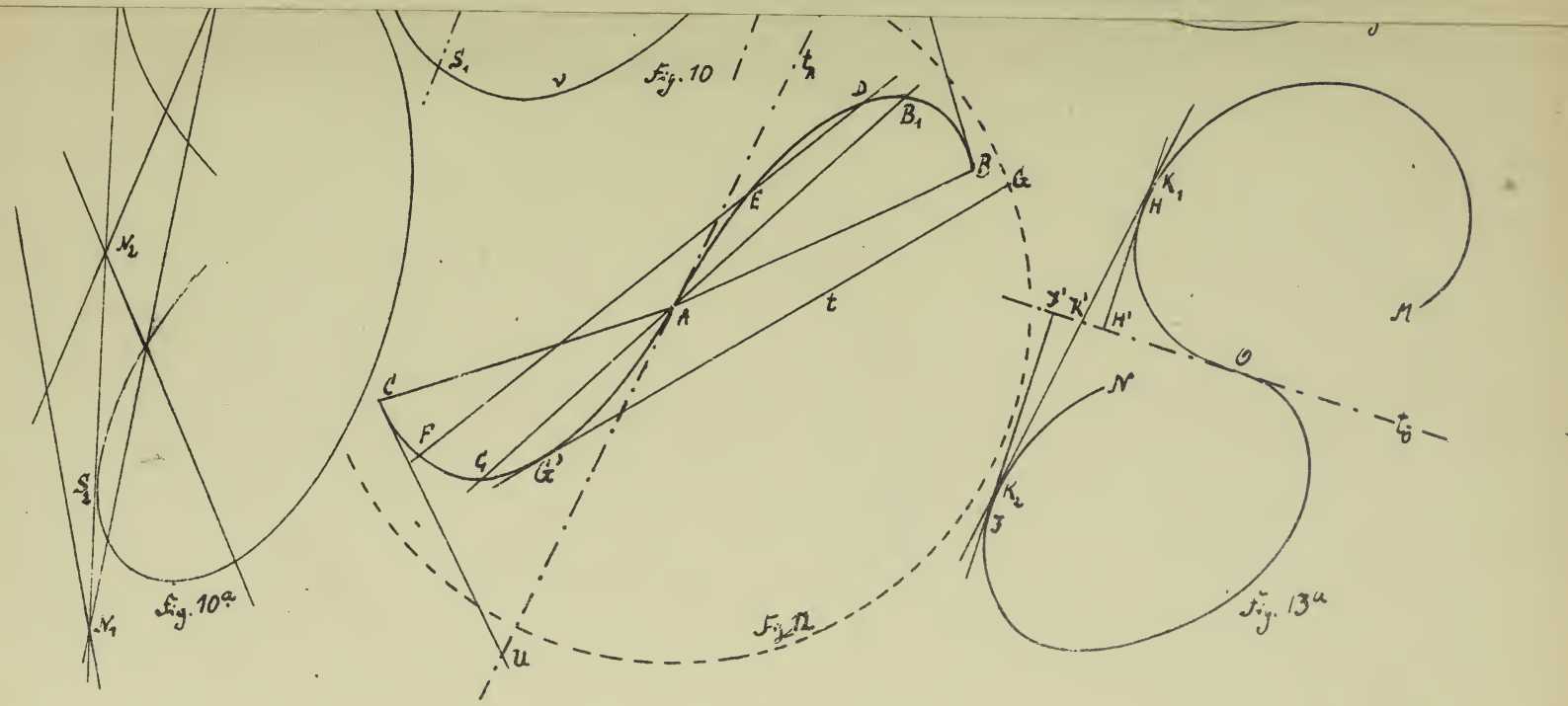

Fig. 10
Fig. 10a
Fig. 12
Fig. 13a

Fig. 1

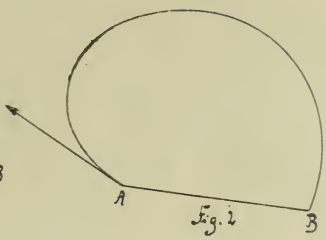

Fig. 2

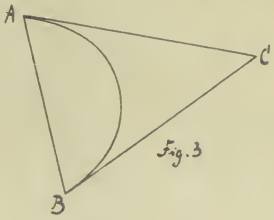

Fig. 3

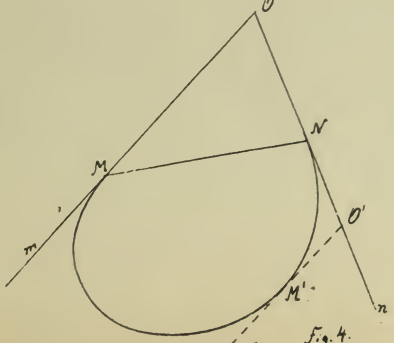

Fig. 4.

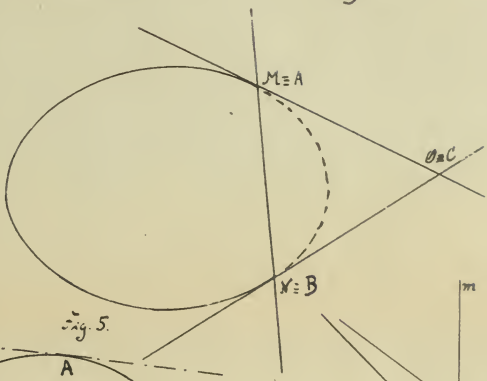

Fig. 5.

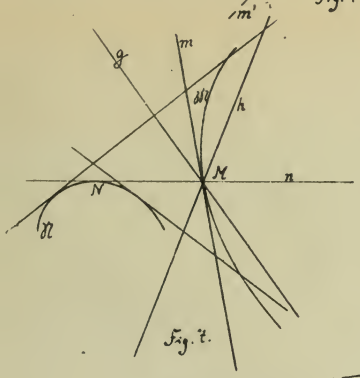

Fig. 7.

Fig. 8.

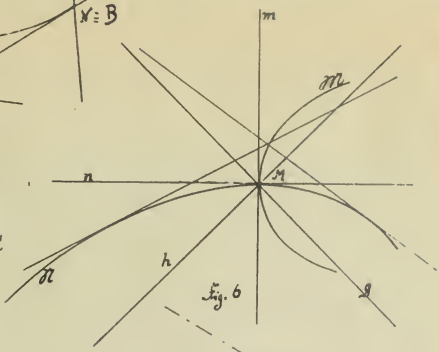

Fig. 6

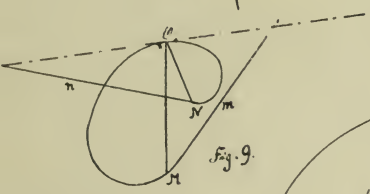

Fig. 9.

Fig. 10

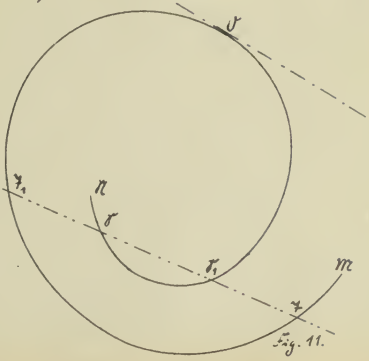

Fig. 11.

Fig. 10a

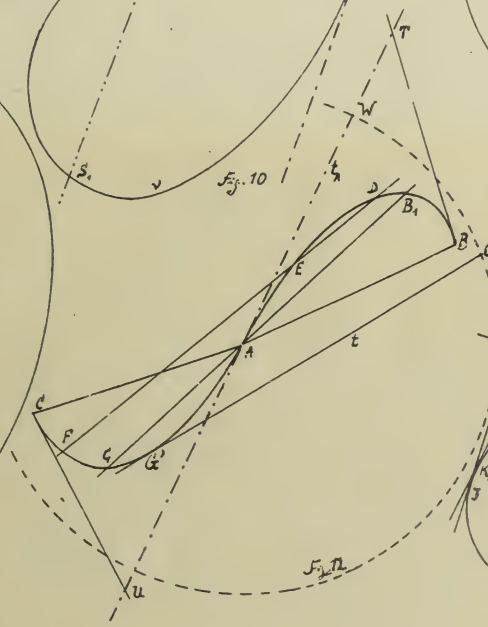

Fig. 12

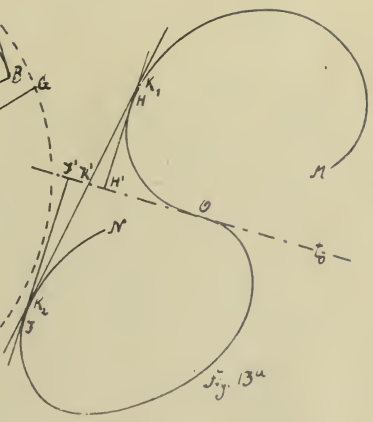

Fig. 13a

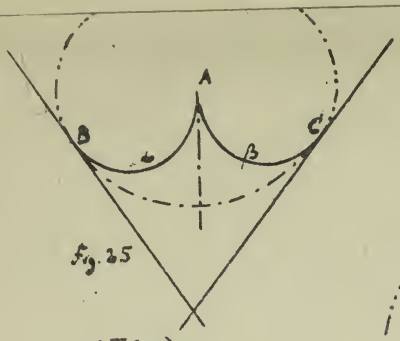

Fig. 25

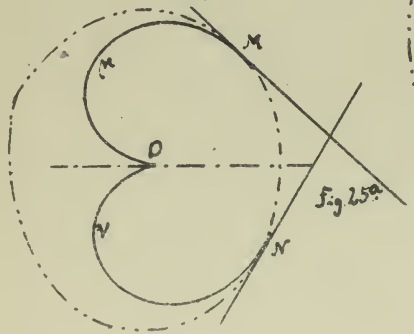

Fig. 25a

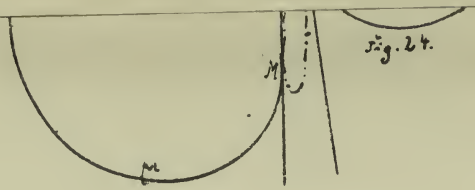

Fig. 24.

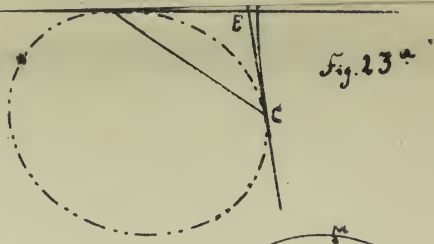

Fig. 23a

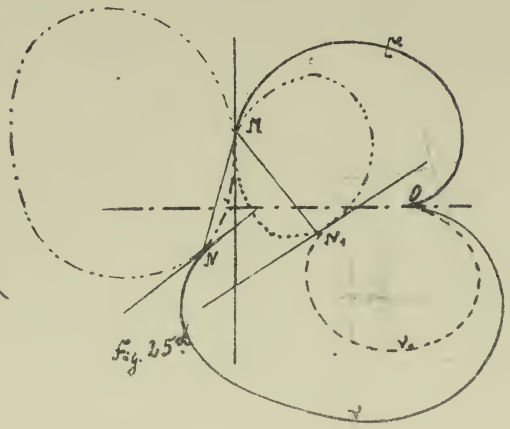

Fig. 25c

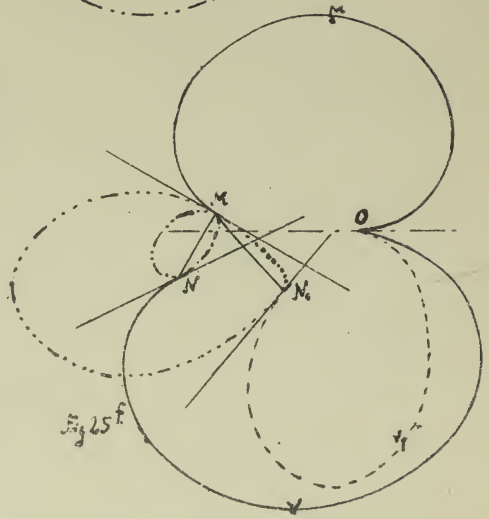

Fig. 25f

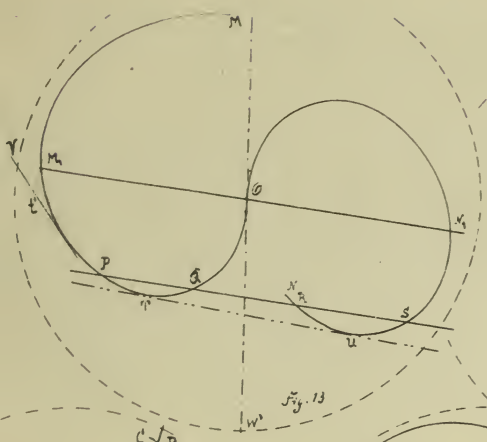

Fig. 13

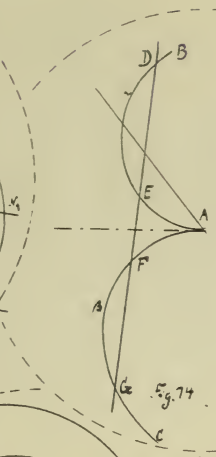

Fig. 14

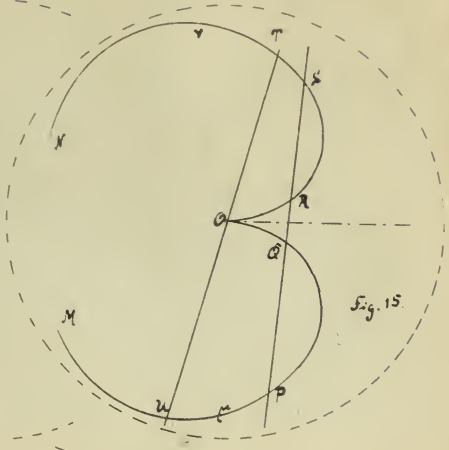

Fig. 15

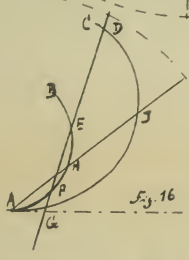

Fig. 16

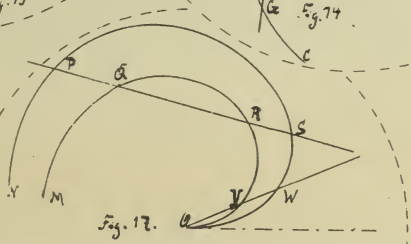

Fig. 17.

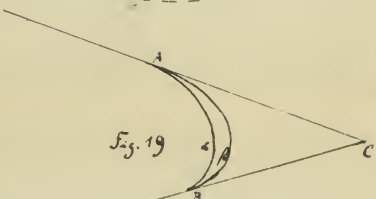

Fig. 19

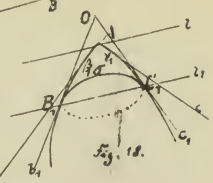

Fig. 18.

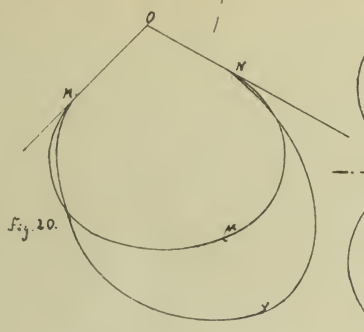

Fig. 20.

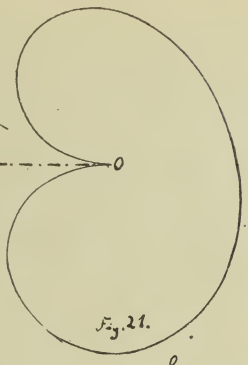

Fig. 21.

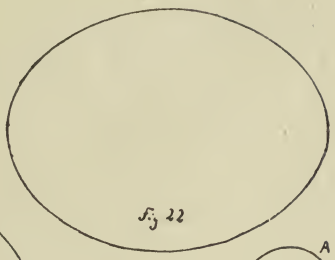

Fig. 22

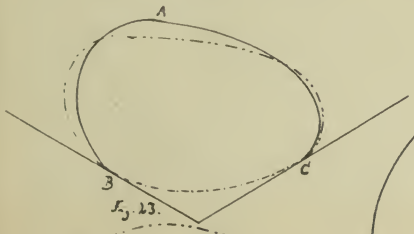

Fig. 23.

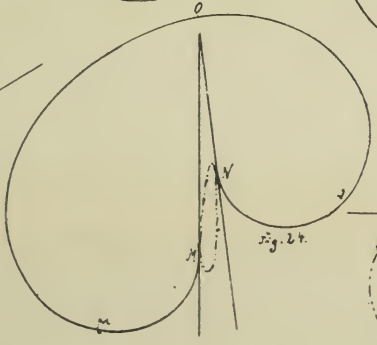

Fig. 24.

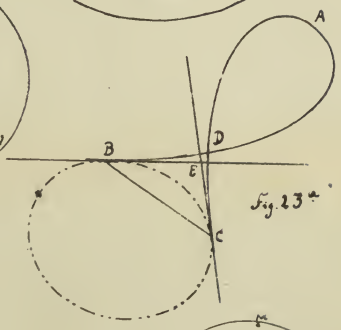

Fig. 23*

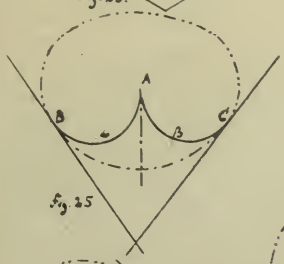

Fig. 25

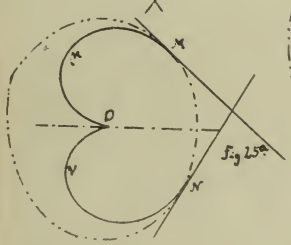

Fig. 25*

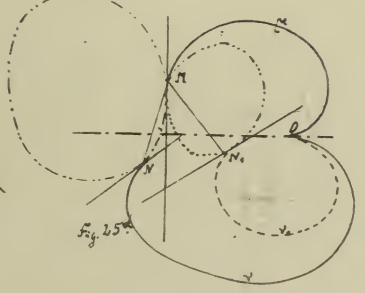

Fig. 25**

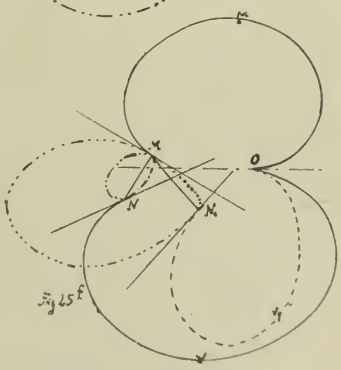

Fig. 25***

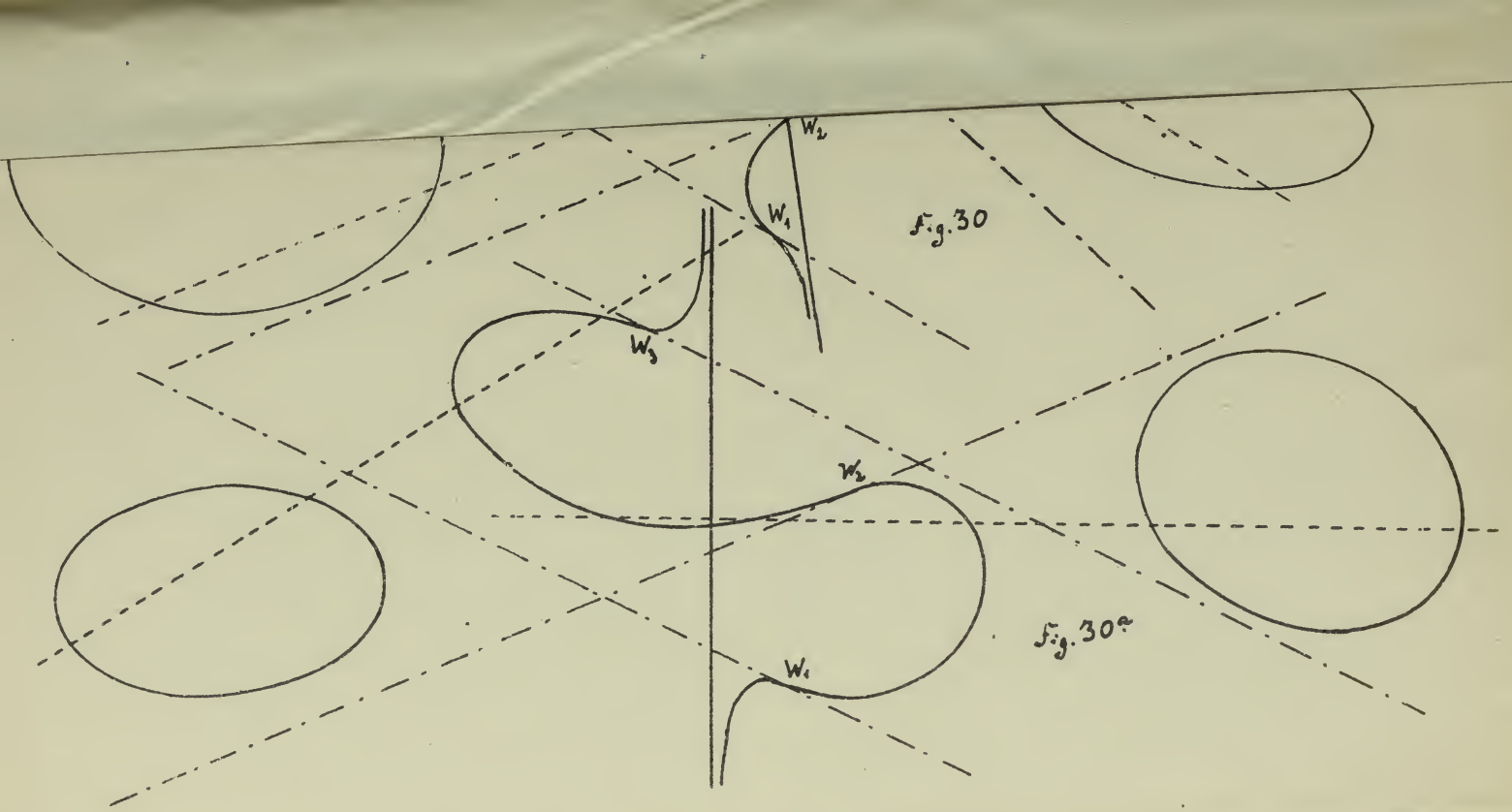

Fig. 30

Fig. 30a

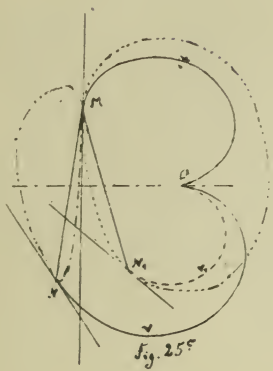

Fig. 25ª

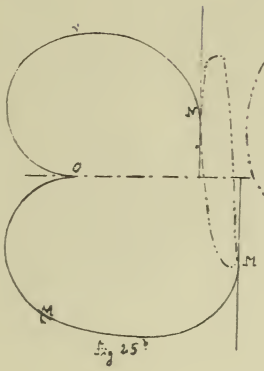

Fig. 25ᵇ

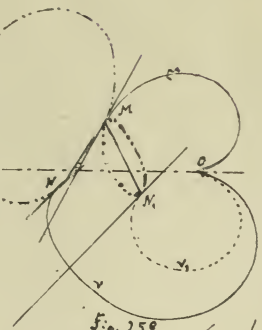

Fig. 25ᶜ

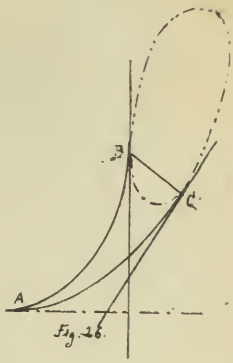

Fig. 26.

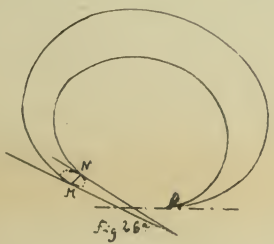

Fig. 26ª

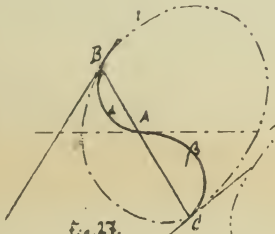

Fig. 27.

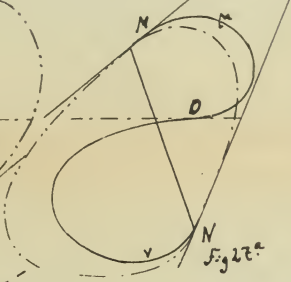

Fig. 27ª

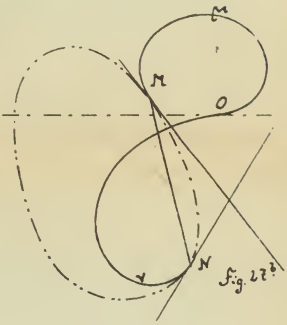

Fig. 27ᵇ

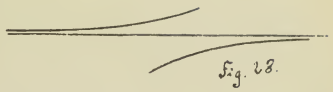
Fig. 28.

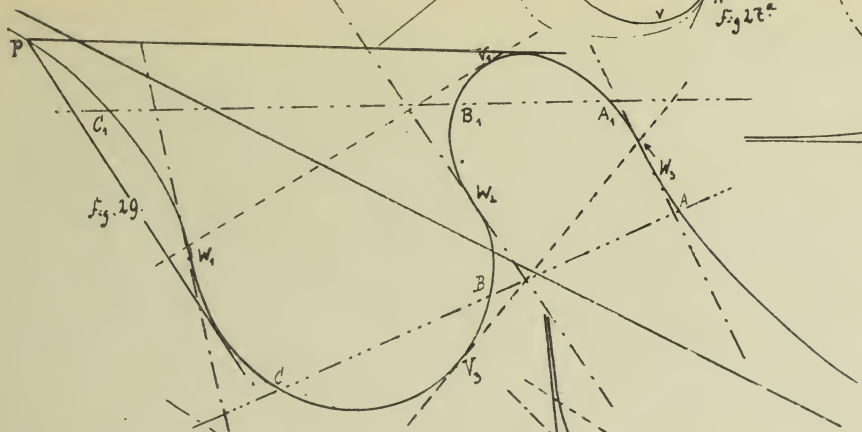

Fig. 29.

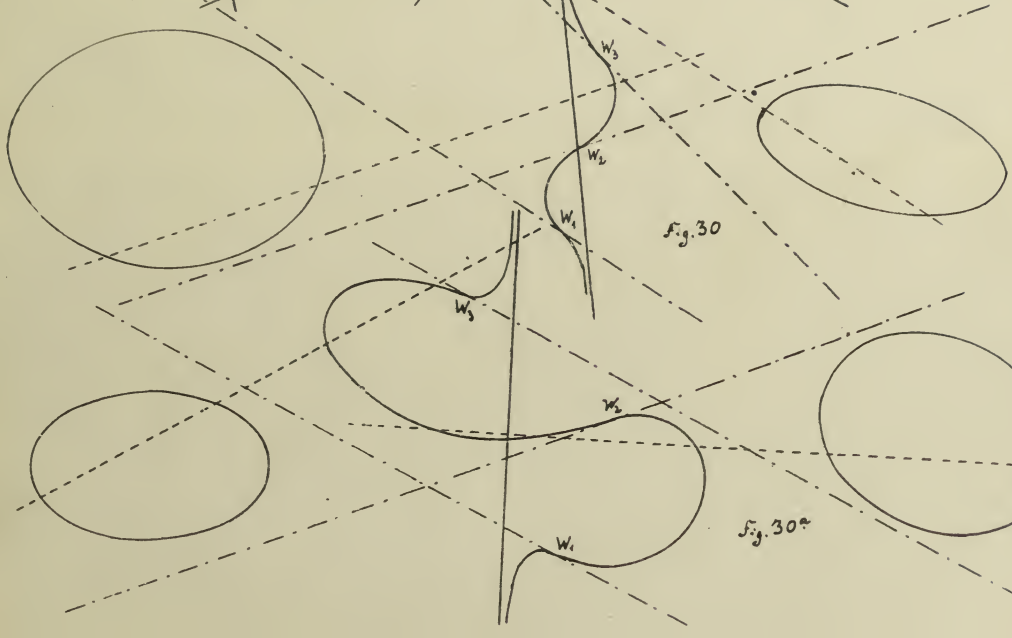

Fig. 30

Fig. 30ª